

Álgebra Linear
e geometria analítica

Tarcisio Praciano-Pereira¹

Primeira Edição
Edições Eletrônicas da
Sobral Matemática
15 de fevereiro de 2015

¹tarcisio@sobralmatematica.org

Sumário

Introdução	2
I Geometria do plano	5
1 plano cartesiano	7
2 Números complexos	21
2.1 incompletitude, \mathbf{R}	21
2.1.1 números complexos	22
2.1.2 A representação geométrica dos complexos	24
2.2 Números complexos: extensão dos reais	28
2.3 Módulo, argumento e conjugado	33
2.4 Intepretação geométrica do produto	34
2.4.1 Para melhorar a arte de fazer contas	38

Lista de Figuras

1	o caminho da Rosetta em direção ao cometa 67P/C-G	2
1.1	reta numérica, representação geométrica de \mathbf{R}	7
1.2	frações triângulos semelhantes	8
1.3	segmentos de reta na reta orientada	8
1.4	Sistema de coordenadas cartesianas	10
1.5	Distância entre dois pontos e o teorema de Pitágoras	12
1.6	Parte da curva algébrica	15
1.7	programa para traçar curvas de nível	16
1.8	Plano paralelo ao eixo do cone: hipérboles	17
1.9	Quando o plano é paralelo à geratriz: parábola	18
1.10	A elipse degenerada: círculo	18
1.11	imagem das cônicas no plano XOY	19
1.12	Interseções do plano ZOY com o cone	20
2.1	Representação geométrica dos complexos	24
2.2	Produto de números complexos	24
2.3	25
2.4	Propriedades dos números complexos	28
2.5	Conjugado de um número complexo	31
2.6	A projeção de $a + bi$ sobre \mathbf{S}^1	34

Esta é uma versão preliminar deste livro e a introdução tem o papel de planejamento do livro portanto não leve muito a sério este texto introdutório uma vez que nem sempre será verdade o que for afirmado aqui uma vez que o planejamento pode ser alterado sem aviso prévio.

O meu objetivo é fazer Álgebra Linear usando a Geometria Analítica como laboratório de trabalho. Por um lado isto representa uma Álgebra Linear menos avançada mas também mais aplicada. Por outro lado a Geometria Analítica vai ser apresentada com tratamento vetorial e potencialmente mais viva e mais motivadora. Por exemplo, estou lançando mão dum acontecimento recente que foi a nave Rosetta do Programa Espacial Europeu que se aproximou do cometa 67P/C-G, confira a figura (fig 1), página 2, lançando nele um robot que em

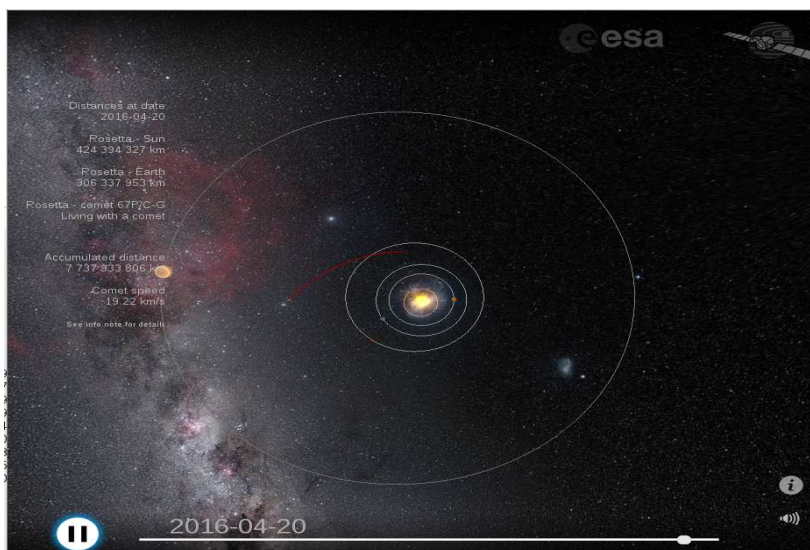


Figura 1: o caminho da Rosetta em direção ao cometa 67P/C-G

seguida começou a enviar dados de análises químicas e geológicas de amostras da superfície do cometa.

Se, por um lado, isto é um tremendo gasto feito num momento em que Humanidade está agonizando, tendo no horizonte uma possibilidade de extermínio e portanto este projeto pode ser simplesmente inútil e seus recursos poderiam ser dirigidos para alterar o modo de vida na Terra abrindo possibilidade de sobrevivência para todos que vivemos aqui, por outro lado representa um exemplo de aplicação de alguns aspectos da Matemática que vamos estudar neste livro.

Observe que a Matemática deste livro oferece apenas parte da tecnologia utilizada para levar Rosetta às vizinhanças do cometa 67P/C-G, as elipses e as parábolas, que são as trajetórias de grande parte dos astros no Universo e em particular dos planetas do sistema solar, e Rosetta foi lançada para entrar nestas elipses aproveitando oportunidades para pular duma elipse para outra ganhando velocidade com as acelerações gravitacionais de Marte, Venus, do Sol e da Terra para ser catapultada entre as elipses e finalmente ser jogada na exteira do cometa com velocidade suficiente para alcança-lo ficando próximo o suficiente para lançar o robot sobre a superfície do cometa. Para isto se usou:

- Geometria Analítica;
- Equações diferenciais;
- muita Computação;
- muito dinheiro.

Então não vou poder fazer isto tudo neste livro em parte pela restrições orçamentárias que são muito grandes do meu lado. . . mas vou poder mostrar-lhe parte do processo e motivação para que em outras disciplinas mais a frente você chegue mais próximo de compreender todas as etapas do projeto. O livro não se dedica à Rosetta, mas vou usar esta motivação em vários pontos do texto, sobretudo quando estudarmos as *elipses* e as *parábolas* que são as duas curvas usadas na base dos cálculos.

Geometria Analítica é o estudo das cônicas, *elipses* e *parábolas* são exemplos de cônicas.

Uma prévia do projeto é a seguinte:

- No primeiro capítulo estou tratando do plano mas como ele coincide com os números complexos vou aproveitar para fazer duas coisas numa só, estudar os números complexos como se fosse o plano.
- No segundo capítulo vou dedicar-me às cônicas como curvas planas e apresentar todas as equações da Geometria Analítica plana.
- No terceiro capítulo vou tratar do \mathbf{R}^3 mais ou menos expandindo o que tiver sido feito nos outros capítulos agora para o espaço tridimensional porém com as matrizes no foco. Neste momento já estaremos em plena Álgebra Linear.
- O quarto capítulo será o estudo do espaço \mathbf{R}^4 mas com o pensamento num espaço de dimensão n qualquer porque \mathbf{R}^4 é o primeiro espaço de baixa dimensão em que acontecem *coisas estranhas* relativamente à nossa *dimensão habitual*. Desta forma vou usar o \mathbf{R}^4 como suporte para generalização para uma dimensão qualquer.

Mas como já lhe fiz o alerta, o livro ainda não está escrito, este é apenas o plano do trabalho que pode ser alterado sem aviso prévio.

Sobral, fevereiro de 2015

Tarcisio

Parte I

Geometria do plano

Capítulo 1

O plano cartesiano

————— - geometria analítica foi criada para aplicar os métodos da álgebra e da aritmética às relações geométricas, comumente ligada ao nome de *René Descartes* que teria sido o idealizador do sistema de *coordenadas cartesianas*.

A Geometria Analítica define as equações de alguns lugares geométricos, como retas, planos, círculos, elipses, parábolas, hipérboles, as chamadas cônicas. Confira

- equação do círculo, equação da elipse, equação da hipérbole, equação da parábola,
- equação da reta;
- plano coordenado, eixos coordenados;

O sistema de coordenadas cartesianas basicamente identifica os pontos da *reta numérica* com um número real e é isto que chamamos de *coordenada* dum ponto na reta.

Se identificarmos um ponto, numa reta qualquer, como sendo o *zero*, à direita do qual, por convenção se identifica um outro ponto como sendo o 1 como você pode ver na figura (fig 1.1), página 7, então criamos uma sistema para

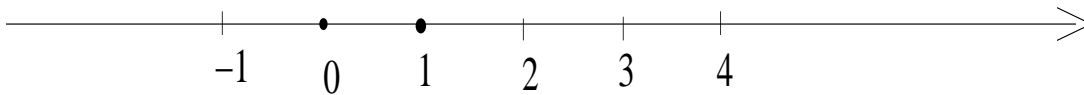


Figura 1.1: reta numérica, representação geométrica de \mathbf{R}

“numerizar a reta” ou “digitalizar a reta”. Desta forma a reta deixa de ser apenas um ente geométrico e passa agora a ser uma representação do conjunto dos números reais \mathbf{R} .

- A escolha dum ponto para representar o zero dividiu a reta em duas semiretas.

- A escolha dum ponto para representar o número 1 selecionou uma das semiretas como a *semireta positiva*, mas fez mais do que isto definiu um segmento de reta com medida 1 o que nos permite propagar pela reta numérica todos os números inteiros usando, por exemplo, um compasso para marcar os inteiros positivos e negativos.
- Os números negativos são marcados na *semireta negativa*, naturalmente.

A semelhança de triângulos nos permite registrar a posição dos números racionais que não sejam inteiros, confira a figura (fig 1.2), página 8, onde você

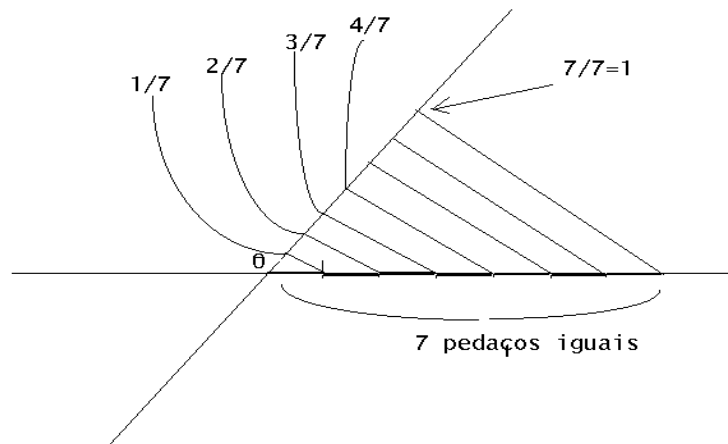


Figura 1.2: frações triângulos semelhantes

pode ver as frações da forma $\frac{p}{7}$; $0 \leq p \leq 7$.

A *reta numérica* herda da *reta geométrica* uma propriedade importante dos segmentos de reta, confira a figura (fig 1.3), página 8,

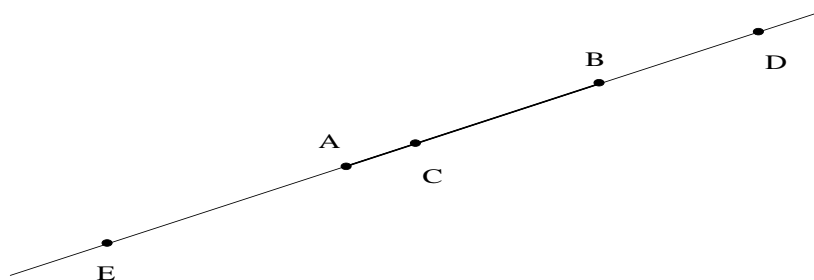


Figura 1.3: segmentos de reta na reta orientada

- dois pontos diferentes, A, B determinam um segmento de reta,
- no segmento de reta \overline{AB} tem um ponto, C diferente dos extremos

- e um quarto ponto D fica fora do segmento.
- Como a reta real é orientada então o ponto que fica fora do segmento de reta, que agora chamamos de *intervalo*, pode ser maior do que B ou menor do que A , confira a figura (fig 1.3).

Para os números a propriedade adquire a redação *entre dois números diferentes quaisquer, sempre tem outro entre eles, um terceiro que é maior dos que estes dois e um quarto que é menor do que eles todos.*

Isto é consequência da escolha do 0 e do 1 criando uma *ordem na reta*.

Em símbolos ficaria assim, usando o símbolo \mathbf{R} para representar a reta numérica

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists c \in \mathbf{R})(a \leq c \leq b); \quad (1.1)$$

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists d \in \mathbf{R})(a \leq b \leq d); \quad (1.2)$$

$$a, b \in \mathbf{R}; a \leq b; \Rightarrow (\exists e \in \mathbf{R})(e \leq a \leq b \leq d); \quad (1.3)$$

e podemos iterar esta propriedade indefinidamente *porque a reta é infinita.*

Todas as propriedades da *reta geométrica* se aplicam a *reta numérica*, mas a reta numérica é uma reta especializada que tem mais propriedades o que a tranforma no conjunto dos números reais.

Se além disto considerarmos um par de retas numéricas concorrentes no zero como mostra a figura (fig 1.4), página 10, podemos agora “numerisar” o plano. Com três retas podemos numerizar o espaço $3D$ e assim por diante. A figura (fig 1.4) é uma representação do produto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ criando o *plano numérico*. Mas esta denominação não é usada, dizemos *o plano coordenado*, a *reta numérica*.

Com três *retas numerizadas* se cortando perpendicularmente na origem, poderíamos representar geometricamente \mathbf{R}^3 , ou numerizar o espaço \mathbf{R}^3 .

Na figura (fig 1.4) estão representados vários pontos do plano, os pontos

$$\{(-2, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$$

todos no que chamamos *eixo OX*, o eixo horizontal. Também estão marcados os pontos

$$\{(0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2)\}$$

no eixo *OY* e o ponto $(3, 2)$ também está marcado.

Agora é possível fazer referência a conjuntos geométricos com equações. Por exemplo, se estabelecermos a convenção de que a primeira coordenada ficará representada pela variável x e que a segunda coordenada será representada pela variável y então a equação da primeira bissetriz dos eixos, a reta que divide ao meio o ângulo determinado pelos eixos OX e OY , é $y = x$.

Você pode traduzir a equação $y = x$ com a frase *é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano tal que a abcissa de P é igual a ordenada de P .*

Podemos identificar o *coeficiente angular* de algumas retas¹ estabelecendo uma proporção entre as coordenadas horizontais e verticais de cada ponto sobre

¹o coeficiente angular tem um defeito importante: as retas perpendiculares ao eixo OX não têm coeficiente angular.

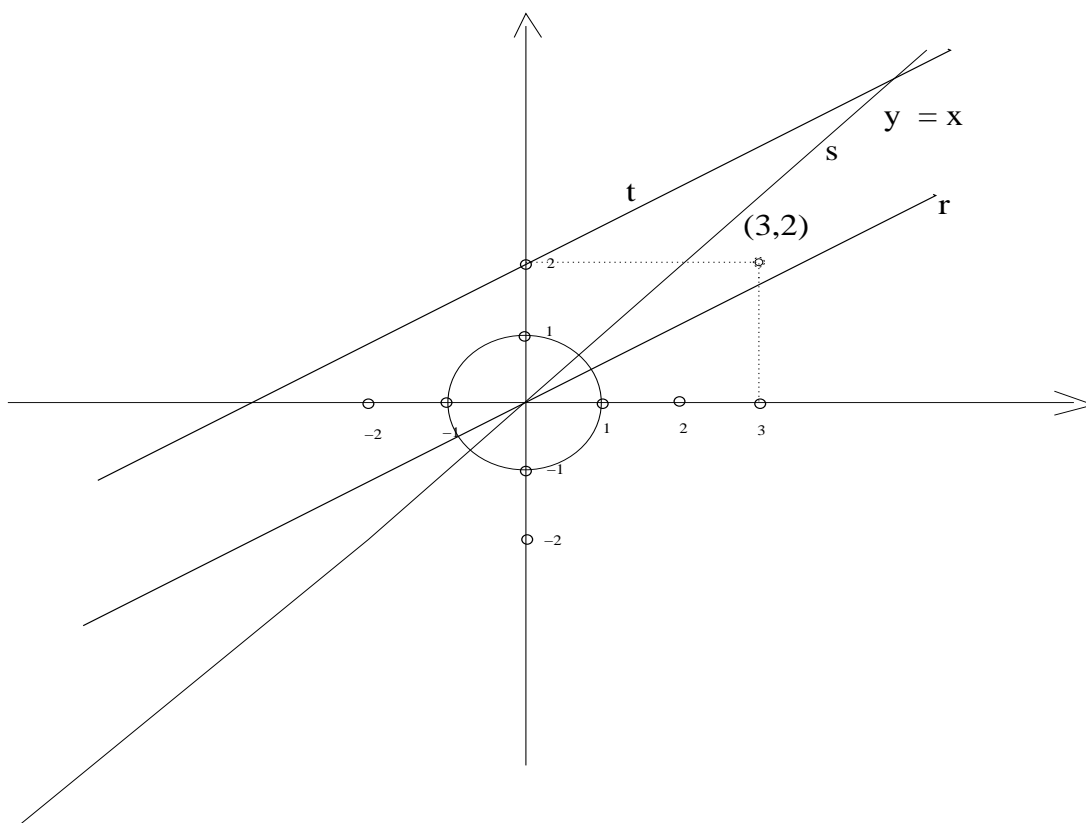


Figura 1.4: Sistema de coordenadas cartesianas

ela. No caso da reta $y = x$ esta proporção é 1 e então escrevemos $y = 1x$ e neste caso se segue a convenção da álgebra não escrevendo 1.

A outra reta que aparece na figura (fig 1.4) teria um *coeficiente angular* positivo e menor do que 1 porque a coordenada vertical será sempre, em módulo, menor do que a coordenada horizontal, escrevemos $y = mx$ em que o número $m < 1$.

Este coeficiente pode ser calculado, considerando a reta que aparece na figura, podemos medir o comprimento do segmento de reta que parte do ponto $(1, 0)$ até encontrar a reta e este valor é m , no caso da reta r este valor é $m = 0.56$ aproximadamente. Então a equação da reta r é $y = 0.56x$. Observe que o plano, agora, é uma região “métrica”, podemos medir as distâncias entre os pontos do plano, neste caso usamos uma régua para fazê-lo.

Isto vale para as retas que passem na origem. Para outra reta qualquer, que não passe na origem, confira na figura (fig 1.4), é o caso da reta t , podemos encontrar-lhe uma paralela passando na origem e aplicar o mesmo método para encontrar m porém a equação que podemos escrever facilmente seria a da reta paralela passando na origem: $y = mx$. É o caso da reta t que é paralela a reta r , na figura (fig 1.4).

Você pode ver que precisamos duma metodologia mais avançada para escrever a equação de qualquer reta. Podemos construir um método sem grandes

dificuldades se aceitarmos algumas afirmações como óbvias, por exemplo, que a equação de *quase todas* as retas seria da forma $y = mx + b$ então o número b é a distância ao longo do eixo OY entre as duas paralelas que no caso da reta t é 2 então a equação da reta t é $y = 0.56x + 2$.

Estes dois coeficientes recebem os nomes de *coeficiente angular* e *coeficiente linear* e na construção que acabei de fazer você viu as razões dos nomes escolhidos: m , *coeficiente angular*, é a razão de proporcionalidade entre as coordenadas horizontal e vertical, quando a reta passa na origem, mas ainda tem o mesmo sentido em qualquer reta paralela a elas. b é a distância de uma reta, ao longo do eixo OY à paralela que passa na origem, o *coeficiente linear*.

Agora, com uma expressão do tipo $y = mx + b$, em que você escolhe os valores de m e de b você pode facilmente fazer o gráfico da reta que tenha esta equação. Experimente com **gnuplot**, e aqui está o código

```
m1 = 0.5; m2 = 1; m3 = 1.5; m4 = -0.5; m5 = -1; m6 = -1.5;
b = 0.5; b = 1; b = 1.5; b = -0.5; b = -1; b = -1.5;
r1(x) = m1*x + b; r2(x) = m2*x + b; r3(x) = m3*x + b;
r4(x) = m4*x + b; r5(x) = m5*x + b; r6(x) = m6*x + b;
plot r1(x), r2(x), r3(x), r4(x), r5(x), r6(x), 0;
pause -2 "Aperte enter para terminar "
```

raspe e cole num terminal do **gnuplot** e você vai ver o gráfico das retas. **gnuplot** vai ler todos os valores da segunda linha mas vai usar o último apenas. Basta você apagar o último para ver novos gráficos. Ou digite, no terminal do **gnuplot**

```
b = 3;
replot;
```

e novos gráficos de retas, agora $b = 3$ serão desenhados. Identifique os coeficientes angulares em cada gráfico para adquirir intuição a respeito do coeficiente angular.

O método que descrevi não vale para as retas que sejam perpendiculares ao eixo OX , mas a equação duma reta deste tipo é fácil de ser obtida, nelas a primeira coordenada será sempre constante, o valor, no eixo OX onde elas passam. Por exemplo $x = 0$ é a equação do eixo OY , e $x = 4$ é a equação de uma reta paralela ao eixo OY passando no ponto 4 do eixo OX .

————— - **distância entre dois pontos** é conceito da Geometria Analítica generalizado na *teoria dos espaços métricos* que define *distância* abstraindo o sentido geométrico mas guardando as propriedades fundamentais da distância. Confira *distância*.

A Geometria Analítica *digitalizou* o espaço e a geometria euclidiana, tornando possível a algebrização da geometria. Assim (x, y) para dois números reais dados representam um ponto do espaço \mathbf{R}^2 , que é um plano ou um espaço bidimensional, ou (x, y, z) , para três números reais dados representam um ponto do espaço \mathbf{R}^3 , um espaço tridimensional, ou

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_k \in \mathbf{R}; P \in \mathbf{R}^n \text{ um espaço de dimensão } n; (1.4)$$

Dados dois pontos no $P, Q \in \mathbf{R}^2$, confira a figura (fig 1.5), página 12, podemos *calcular* a distância entre eles usando o teorema de Pitágoras,

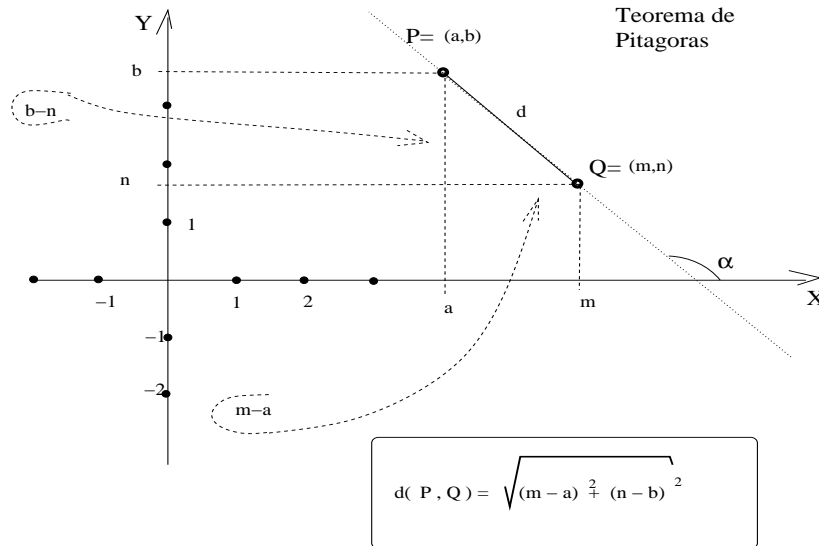


Figura 1.5: Distância entre dois pontos e o teorema de Pitágoras

$$d(P, Q) = \sqrt{(m-a)^2 + (n-b)^2} = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2}; \quad (1.5)$$

Observe que o módulo das diferenças que aparecem na equação (eq. 5) medem o comprimento dos lados do triângulo retângulo que o segmento \overline{PQ} determina com retas paralelas aos eixos coordenados.

As propriedades da distância são

1. reflexividade $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$
2. simetria $d(P, Q) = d(Q, P)$;
3. desigualdade triangular $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$

Qualquer função de duas variáveis que tenha estas propriedades define uma distância num conjunto M e é quando se diz que (M, d) é um espaço métrico.

A distância é uma propriedade bidimensional porque envolve em suas propriedades no máximo três elementos do espaço que determinam um plano deste espaço, o que facilita muito nas demonstrações das propriedades mais gerais da distância. Para o \mathbf{R}^n a fórmula na equação (eq. 5) fica

$$\begin{cases} d(P, Q) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (p_k - q_k)^2}; \\ P = (p_1, \dots, p_n); Q = (q_1, \dots, q_n); \end{cases} \quad (1.6)$$

Uma forma de definir a distância passa pelo *produto interno* ou *produto escalar* que está definido em todos os espaços de dimensão finita e também

em espaços de dimensão não finita. O *produto escalar*, como meio de definir distância também pode ser definido de várias maneiras. A definição usual no \mathbf{R}^n é

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=1}^n p_k q_k = \|P\| \|Q\| \cos(\gamma); \quad (1.7)$$

em que γ é o ângulo entre P e Q . Como dois vetores no \mathbf{R}^n determinam um plano do \mathbf{R}^n , então o ângulo é um conceito geométrico claro, é o menor segmento do círculo trigonométrico que os dois vetores determinam. A primeira expressão na (eq. 7) é uma *forma bilinear* definida em \mathbf{R}^n e a segunda é a expressão bidimensional da mesma no plano determinado pelos dois vetores.

Observe que a equação (eq. 7) nos oferece a oportunidade de definir ângulo entre dois vetores dum espaço qualquer em que esteja definido um produto escalar, usando a função $\text{acos}()$. Tais espaços se chamam *espaço com produto interno*.

Confira *produto escalar* ou *produto interno*.

Uma propriedade que tem uso intenso é a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$|\langle P, Q \rangle| \leq \|P\| \|Q\| \quad (1.8)$$

que tem uma demonstração simples no plano, mas eu já observei que, dados dois vetores, eles determinam um plano do espaço a que eles pertencem portanto demonstrá-la num plano não é uma restrição.

Para isto preciso mostrar que a forma trigonométrica da definição na equação (eq. 7) é idêntica à expressão da soma de produtos na mesma equação porque

$$|\langle P, Q \rangle| = \|P\| \|Q\| \cos(\gamma) \leq \|P\| \|Q\|;$$

Dem:

Se $n = 2$ é consequência direta da *fórmula de Euler* porque, dividindo pelo módulo dos vetores teremos:

$$\left\langle \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} \right\rangle = \frac{|\langle P, Q \rangle|}{\|P\| \|Q\|} \leq 1; \quad (1.9)$$

$$\left\langle \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} \right\rangle = \langle (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), (\cos(\beta), \sin(\beta)) \rangle; \quad (1.10)$$

$$\left\langle \frac{P}{\|P\|}, \frac{Q}{\|Q\|} \right\rangle = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\gamma); \quad (1.11)$$

Na equação (eq. 9) usei a propriedade das formas bilineares que permite a distribuição dos coeficientes $\|P\|, \|Q\|$ entre os dois fatores².

Na equação (eq. 10) usei uma representação plana dos dois vetores que podem ser expressos como pontos do círculo trigonométrico sendo α, β os seus ângulos e γ é o ângulo entre eles.

Os cálculos mostram que posso me reduzir, na demonstração, ao caso dos vetores unitários. Então, na sequência vou supor que $\|P\| = \|Q\| = 1$.

A passagem crítica, na demonstração por indução que está na passagem de $n - 1$ para n que é semelhante à passagem da dimensão 2 para 3, mas esta é mais intuitiva. Portanto deixe-me agora considerar $P, Q \in \mathbf{R}^3$, vetores unitários, portanto pontos de \mathbf{S}^2 a esfera unitária do \mathbf{R}^3 . Mas estes dois vetores determinam um plano que corta \mathbf{S}^2 segundo um círculo unitário, uma curva plana, e, pela demonstração anterior, $\cos(\gamma)$ é o valor do produto escalar entre eles, em que γ é ângulo entre os vetores.

²as forma bilineares generalizam o produto de números que um exemplo de forma bilinear.

Mas esta demonstração não seria necessária dentro do escopo duma demonstração por indução, ela é simplesmente tomada como verdadeira para todo $N \leq n - 1$ e temos que considerar agora $P, Q \in \mathbf{R}^n$, dois vetores unitários. Mas estes vetores definem um plano do \mathbf{R}^n e o valor do produto escalar para dois vetores, no plano, em dimensão $N < n$, por hipótese de indução, é $\cos(\gamma)$, em que γ é ângulo entre os vetores, o que termina a demonstração.

q.e.d .

Um outro exemplo simples de lugar geométrico é o círculo. A geometria o define como *é o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja distância a um ponto fixo C é constante*. Esta distância constante de P a C é o raio r .

A equação do círculo que aparece na figura (fig. 1.4) é simples de ser obtida. Observe que é o círculo trigonométrico. Qualquer ponto em cima deste círculo fica à distância 1 da *origem* $(0, 0)$ dos eixos. Chamando de (x, y) um ponto genérico sobre o círculo e aplicando o teorema de Pitágoras para representar a distância dele até a *origem* encontramos $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ou ainda:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ equação do círculo trigonométrico} \quad (1.12)$$

A equação de um círculo de raio R com centro no ponto (a, b) do plano seria

$$d((x, y), (a, b)) = R; d((x, y), (a, b))^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (1.13)$$

que você pode obter usando novamente o teorema de Pitágoras e a definição de círculo.

Muito mais difícil seria, dada uma equação, como

$$x^3 + 3x^2y + xy^2 + y^3 = 4 \quad (1.14)$$

descobrir que figura seria representada por esta equação. Mas é possível com um programa de computador encontrar alguns pontos que satisfaçam esta equação e obter um gráfico de uma parte da tal figura, aproximadamente, se for possível, se a equação representar alguma figura “real”. A geometria algébrica é a parte da Matemática que tenta responder a esta questão para caso das expressões algébricas. Na figura (fig 1.6), página 15, você pode ver parte da curva algébrica cuja equação se encontra na (eq.14). Ela foi obtida com um programa escrito em Python que varreu um retângulo do plano procurando por pontos que estivessem próximos desta equação. Do gráfico se pode produzir a pergunta: “teria este gráfico uma reta assíntota?”. Uma tal pergunta se pode resolver com métodos avançados do Cálculo.

O programa pode ser visto na figura (fig 1.7), página 16, E você pode alterar a equação de $F(x, y)$ para visualizar o gráfico de outra equação, se este gráfico puder ser feito.

Entenda como funciona o programa e modifique-o para obter outras visualizações desta curva ou de outras. Na figura (fig 1.7), há uma indicação sobre “terminal” o programa está preparado para produzir um arquivo “postscript”, se você quiser que `gnuplot` exiba o gráfico na tela, simplesmente comente as linhas:

```
# transfere.write( "set terminal postscript eps enhanced color \n");
# transfere.write( "set output \"GeometriaAnalitica_03.eps\" \n");
```

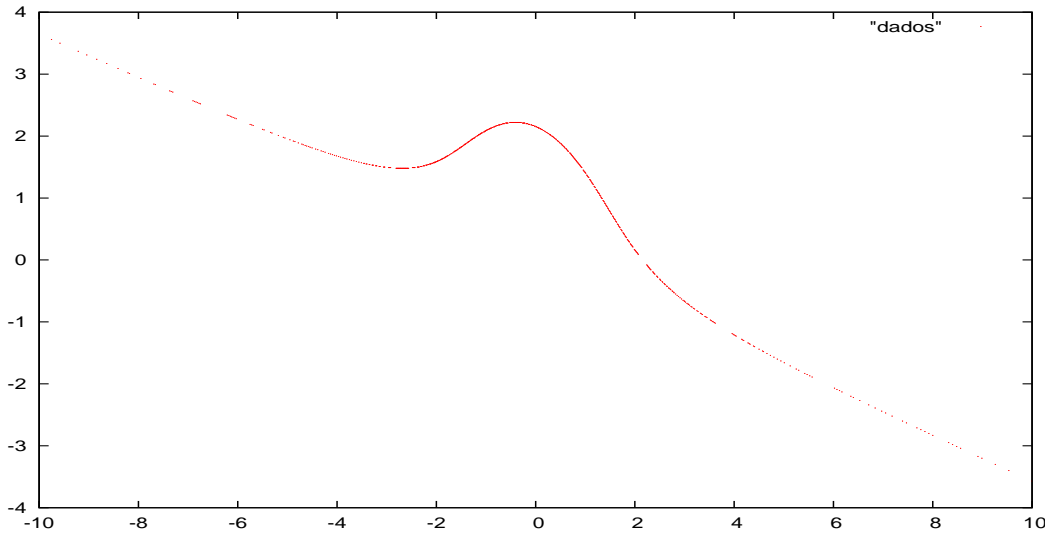


Figura 1.6: Parte da curva algébrica

isto é feito colocando o sinal do “jogo da velha na primeira posição da linha, em python, respeitando a tabulação.

Na imagem do programa, há mais duas setas indicando os pontos onde selecionar a precisão do gráfico, `passo` é a precisão da malha, e `delta` é a precisão com a desigualdade vai ser resolvida. Experimente que não há riscos. Tente o valor grande, por exemplo, 0.5 para `delta` e você verá uma “faixa” no centro da qual se encontra a curva. Na verdade, para qualquer valor escolhido o resultado será uma “faixa”.

Manipule os valores da precisão onde está indicado na figura para conseguir melhor resultado mas comece com valores não muito pequenos, tente algo em torno de $\delta = 0.1$ para começar, depois use um δ menor. O tempo de processamento é consequência do incremento dado a x e a y guardado na variável `passo`, o valor dado a esta variável será o responsável pelo tempo de processamento. Se você escolher um valor muito pequeno prepare-se para aguardar algumas horas até que o gráfico apareça na tela.

Você pode baixar o programa da página

<http://calculo-numerico.sobralmatematica.org/programas//CurvaAlgebrica.py>

Algebricamente, e com algum trabalho, podemos escrever as equações de muitos dos subconjuntos do plano, em particular círculos, hipérbolas e parábolas são estudadas na Geometria Analítica, são as chamadas *cônicas*.

Esta curvas se originam geometricamente de cortes de um cone com duas folhas. Na figura (1.8) página 17, você vê um cone cortado por um plano paralelo ao eixo do cone, mas não precisava que o plano fosse paralelo ao eixo, apenas não podia chegar a ser paralelo à geratriz do cone. Vou mostrar este detalhe na penúltima seção quando discutir a equação da hipérbole.

Se o plano for paralelo à geratriz o resultado é uma parábola que pode ser vista na figura (1.9) página 18, Mas também aqui se tem variantes, o plano pode cortar a folha do cone em vários pontos resultando numa parábola mais

```

#! /usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
import sys
from posix import popen
from math import *

def F(x,y):
    return pow(x,3) + 3*pow(x,2)*y + x*pow(y,2) + pow(y,3);

def cria_dados(inicio, fim, passo, delta, valor):
    dados = open('dados','w')
    x=inicio; y=fim; A=valor;
    while(x<fim):
        y = inicio;
        while(y<fim):
            if (abs(F(x,y) - A) < delta):
                dados.write(str(x)+" "+str(y)+"\n");
            y +=passo;
        x +=passo;
    dados.close();

def cria_transfere():
    transfere = open('transfere','w')
    transfere.write( "set pointsize 0.1 \n");
    transfere.write( "plot \"dados\" with points\n");
    transfere.write( "set terminal postscript eps enhanced color \n");
    transfere.write( "set output \"GeometriaAnalitica_03.eps\" \n");
    transfere.write( "plot \"dados\" with points\n");
    transfere.write( "pause -2 \"Aperte enter para terminar\" \n");
    transfere.close();

def principal():
    print "Lados do retângulo para o gráfico"
    inicio = input("na horizontal, inicio =");
    fim = input("na horizontal, fim =");
    passo = input("O passo da malha, passo = ");
    delta = input("Precisão para resolver a desigualdade, delta = ");
    print "Vou na verdade calcular uma curva de nível e preciso o \n",\
        "o valor de A na expressão F(x,y) = A ";
    A = input("O valor de A = ");
    cria_dados(inicio, fim, passo, delta,A);
    cria_transfere();
    popen("gnuplot transfere");

```

Figura 1.7: programa para traçar curvas de nível

ou menos aberta, vou discutir isto quando construir a equação da parábola na última seção.

Se o plano tiver inclinação maior do que a da geratriz o resultado será uma curva fechada que pode ir de elipse até círculo, vou discutir isto na próxima seção com a equação do círculo quando vou mostrar que o círculo é uma elipse degenerada que é o contrário do que todo mundo diz... a figura (1.10) página 18,

As fotos das interseções do cone foram copiadas, com autorização, da página do Dr. Anthony Rynne, University of Limerick

http://www3.ul.ie/~rynnnet/swconics/planes_cutting_coneA.htm

Na figura (1.11) página 19, você vê plano XOY e o eixo do cone que aparece nas figuras 1.8-1.10 é perpendicular ao plano XOY passando pelo ponto $(0, 0)$. No plano ZOY se podem ver duas retas que se cruzam no ponto $(0, 0, 0)$ a interseção do cone com este plano. Análise que corresponde às figuras 1.8-1.10 é relativa às possíveis forma como um plano intercepte o plano com o plano ZOY que estão representadas na figura (1.12) página 20,

A região hachuriada é a projeção do cone no plano ZOY . Se um plano cortar perpendicularmente ZOY com inclinação **entre** os limites da região hachuriada, corta o cone segundo uma hipérbole. Se o plano tiver **exatamente** a inclinação

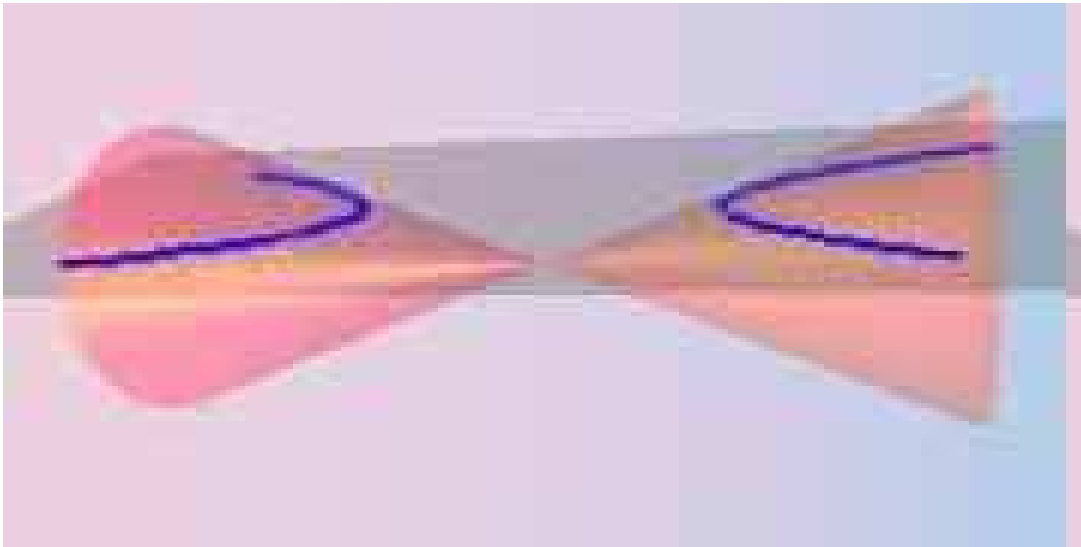


Figura 1.8: Plano paralelo ao eixo do cone: hipérboles

das retas que limitam a região hachuriada irá cortar uma das folhas do cone segundo uma parábola. Se a inclinação do plano estiver **fora** da região hachuriada irá cortar uma das folhas do cone segundo um curva fechada, elipse ou círculo e o caso do círculo corresponde **exatamente** ao eixo OZ .

Há uma infinidade de variantes para as equações de cônicas que podem ser assim obtidas, mas basicamente elas dependem da inclinação da *geratriz do cone* e do ponto $(0, a, b)$ por onde passa o eixo do cone e isto pode dar um livro de 400 páginas como o livro de Lehmann, ou qualquer outro que se tenha ao trabalho de descrever estas possibilidades. A minha opção é descrever o caso que vou chamar de “*padrão*” em que a interseção do cone que aparece na figura 1.12 são as bissetrizes dos eixos do plano YOZ . Qualquer outra variante pode ser obtida com uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

em que x, y são as coordenadas usada pela equação padrão e x', y' são as novas coordenadas depois da transformação. A matriz quadrada deve ter determinante diferente de zero para que seja possível desfazer a mudança. O resultado desta mudança de variáveis será uma forma quadrática

$$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' + Dx' + Ey' + F = 0 \quad (1.16)$$

e existe uma análise da relação dos coeficientes que expressa qual é a forma padrão que originou esta forma quadrática. É importante repetir esta análise rigorosamente porque a expressão na equação (16) serve também de padrão para classificação das equações diferenciais parciais entre parabólicas, elípticas ou hiperbólicas.

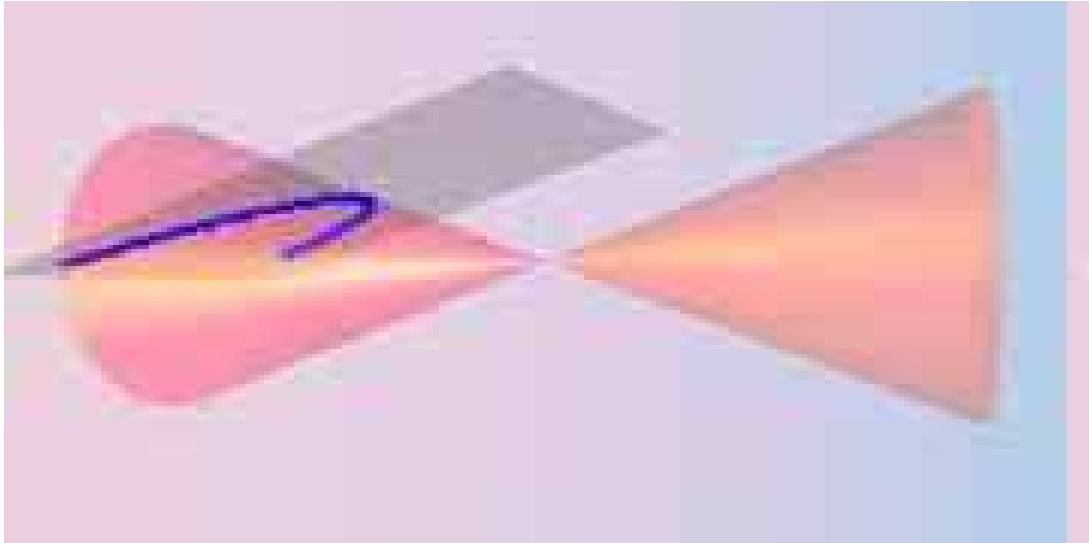


Figura 1.9: Quando o plano é paralelo à geratriz: parábola

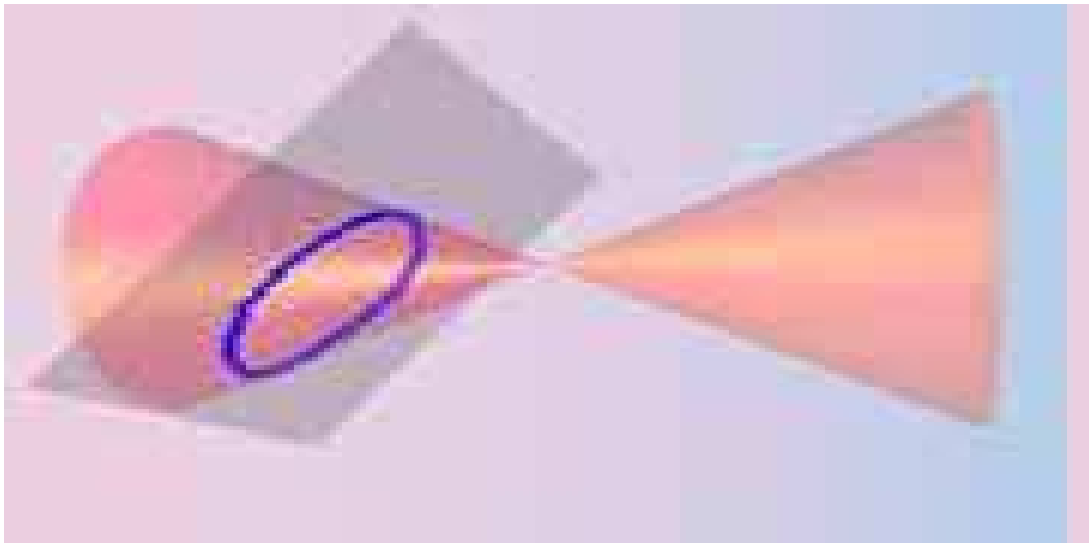


Figura 1.10: A elipse degenerada: círculo

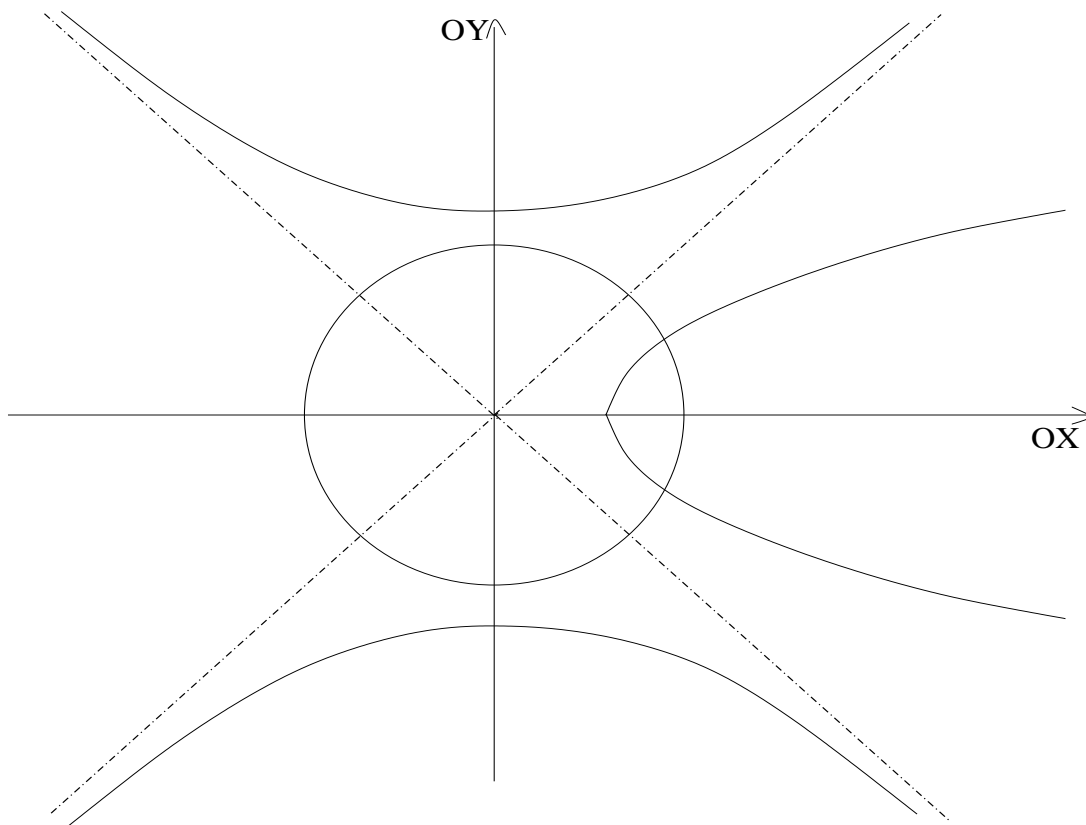


Figura 1.11: imagem das cônicas no plano XOY

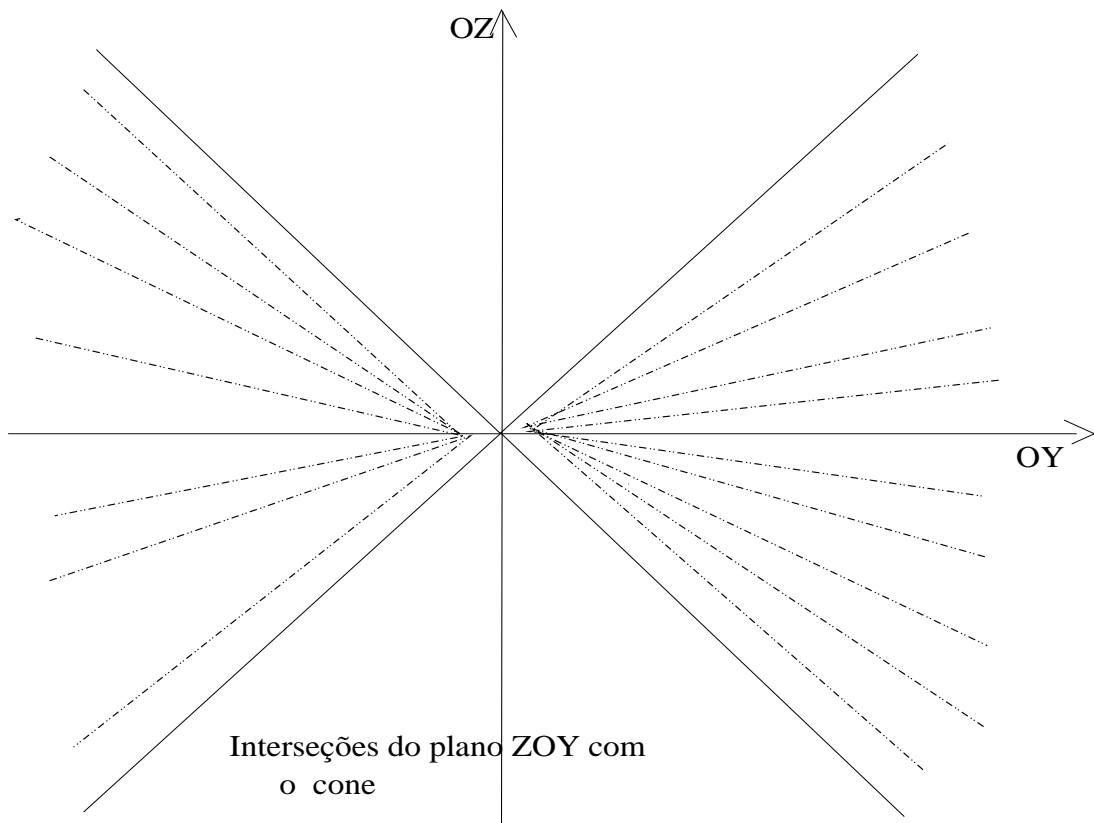


Figura 1.12: Interseções do plano ZOY com o cone

Capítulo 2

O plano complexo

No esforço para resolver equações que nos tempos modernos se pode dizer que começa com Cardano e seus contemporâneos no século 16. Cardano mesmo não conhecia os números complexos mas fez uma operação incluindo raiz quadrada de número negativo que é reconhecida com um dos primeiros passos na descoberta destes números.

Como o próprio nome registra, os matemáticos criaram aos poucos uma entidade estranha, chamada número imaginário, que apareceu como solução da equação do segundo grau.

Com os números imaginários se criaram os “números complexos” outro tipo estranho que funcionava muito muito bem como se fosse um número... o resultado é um objeto geométrico que vamos usar aqui como modelo de vetor.

Os números complexos são assunto ainda da Matemática Elementar, aqui nós os vamos recordar com um sabor de Matemática Universitária e assim utilizá-los como uma introdução aos vetores, porque eles são vetores desde sua origem.

2.1 Incompletitude algébrica de R

A fórmula para resolver equações do segundo grau produz a solução

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac, \quad (2.1)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (2.2)$$

Se Δ for negativo a equação não tem soluções reais. Aos poucos os matemáticos foram experimentando a idéia de aceitar um significado para $\sqrt{\Delta}$; $\Delta < 0$ começando com uma pequena experiência, $i = \sqrt{-1}$ estendendo a regra estrita sobre raízes:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad (2.3)$$

que valia apenas quando $x, y \geq 0$. Com esta extensão se poderia calcular

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i \cdot 2 \quad (2.4)$$

e enfim qualquer raiz de número negativo poderia agora ser calculada.

Em particular, as equações do segundo grau passam a ter sempre solução

apesar de que, cuidadosamente, se acrescente a observação, “raízes imaginárias” quando $\Delta < 0$.

Exemplo 1 *Resolvendo uma equação do segundo grau*

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 25 = 0 &\Rightarrow \Delta = -256 \\ x' = \frac{12+16i}{8}; x'' = \frac{12-16i}{8} \\ x' = \frac{3}{2} + 2i; x'' = \frac{3}{2} - 2i \end{aligned}$$

em que vemos aparecer um “número” do tipo

$$z = a + bi, \tag{2.5}$$

formado por um par de números reais separados pela *unidade imaginária* i .

Um “número” desta forma se chama “número complexo” e foram precisos vários séculos para que eles fossem admitidos como um número comum, *sem complexos*.

2.1.1 Álgebra dos números complexos

Repetindo o que fizeram os nossos antepassados, os números complexos foram inicialmente tratados como uma expressão algébrica em que i era considerado como uma “variável” mas obedecendo a regra

$$\sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1. \tag{2.6}$$

Assim, $z = 2 + 3i$, $w = 5 - 2i$ são somados segundo as regras da álgebra:

- “quem tem “i” é somado com quem tem “i”
- e os que não tiverem “i” são somados entre si”:

$$z + w = (2 + 3i) + (5 - 2i) = (2 + 5) + (3 - 2)i = 7 + i$$

e de maneira idêntica se procede com a multiplicação:

$$\begin{array}{r} (2 + 3i)(5 - 2i) \\ \hline 2 \quad +3i \\ 5 \quad -2i \\ \hline 10 \quad 15i \\ \quad -4i \quad -6i^2 \\ \hline 10 \quad +11i \quad -6(-1) \\ \hline 16 \quad +11i \end{array} \tag{2.7}$$

veja a figura (2.2) na página 24.

Usando estas regras da álgebra podemos escrever uma definição formal para a adição e para a multiplicação de números complexos. Primeiro vamos banir a expressão “quem tem i ” do texto porque ela não é uma *expressão técnica* e nós somos extremamente ligados em *expressões técnicas*.

Definição 1 *Parte real e imaginária de um número complexo*

Dado um número complexo, escrito como

$$z = a + bi \equiv (a, b)$$

designaremos

$$\Re(z) = a \text{ a parte real de } z \quad (2.8)$$

$$\Im(z) = b \text{ a parte imaginária de } z \quad (2.9)$$

Definição 2 (Adição de números complexos) *Dados dois números complexos*

$$v = a + bi \equiv (a, b) \quad (2.10)$$

$$w = c + di \equiv (c, d) \quad (2.11)$$

definimos

$$v + w = (a + c, b + d) \quad (2.12)$$

$$\equiv v + w = (a + c) + (b + d)i \quad (2.13)$$

a soma se faz “coordenada por coordenada”, ou ainda

$$\Re(v + w) = \Re(v) + \Re(w) \quad (2.14)$$

$$\Im(v + w) = \Im(v) + \Im(w) \quad (2.15)$$

As duas formas

$$a + bi, (a, b)$$

são equivalentes e usamos uma ou a outra conforme for mais conveniente:

$$\boxed{\text{expressão algébrica}} \quad \mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2 \quad \boxed{\text{entidade geométrica.}} \quad (2.16)$$

Observe que a última parte, na expressão acima, $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, é uma *representação geométrica* para os números complexos, uma vez que estamos dizendo que existe um ponto do plano,

$$(c, d) \in \mathbf{R}^2 \quad (2.17)$$

que é “equivalente” ao número complexo

$$c + di \in \mathbf{C}. \quad (2.18)$$

Quando foi descoberta a *representação geométrica* para os números complexos, um *salto qualitativo* foi dado. Como eles tinham uma *representação geométrica*, não podiam ser tão estranhos, *imaginários*, como no começo pareciam. Veja a figura (2.1).

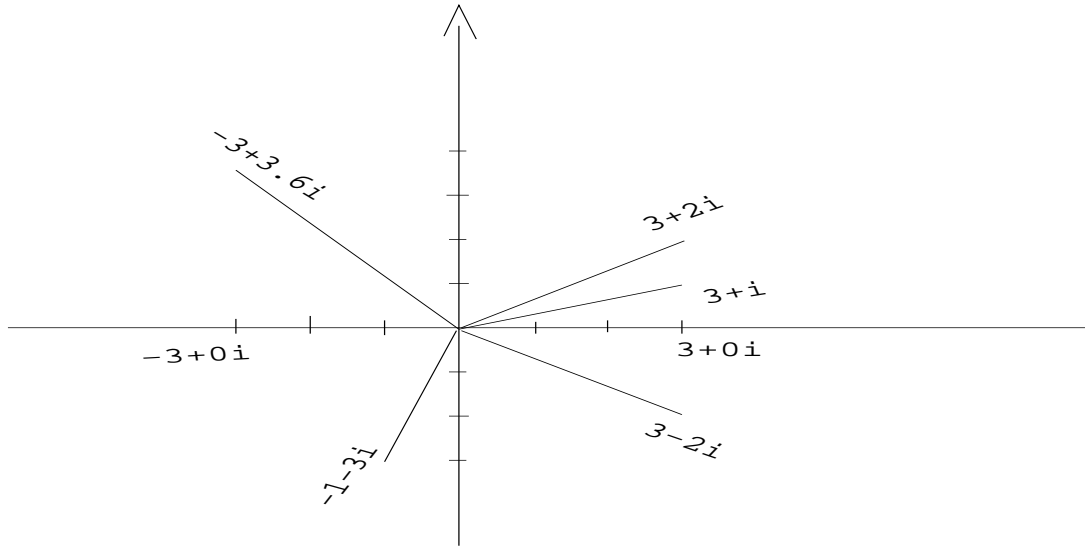


Figura 2.1: Representação geométrica dos complexos

Definição 3 *Produto de números complexos*

Dados dois números complexos $z = a + bi$, $w = c + di$ o produto deles é:

Multiplicação de números complexos

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{a + bi} \\
 \begin{array}{c} \downarrow \quad \swarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{c + di} \end{array} \\
 \hline
 \mathbf{(ac - bd) + (ad + bc)i}
 \end{array}$$

Figura 2.2: Produto de números complexos

$$(ab - bd) + (ad + bc)i$$

2.1.2 A representação geométrica dos complexos

Falamos acima na equivalência

$$\mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2, \quad (2.19)$$

o par (c, d) é um ponto do plano e, assim, estamos *representando* um número complexo com uma entidade geométrica, um ponto.

Os números complexos trouxeram, para o reino dos números, os conceitos da geometria: ângulo, módulo, direção e sentido. A Física, desde cedo, lançou mão deles, com muito sucesso, por exemplo, na eletricidade.

A figura (2.3) na página 25 descreve alguns aspectos geométricos dos números complexos, como o módulo e o argumento.

- o vetor z O ponto do plano, $z = (a, b)$ determina com a origem um segmento de reta que identificamos, também, com o número complexo z e que vamos chamar de *vetor*;
- argumento de z é o ângulo que o *vetor* z determina com o semi eixo positivo OX , no sentido anti-horário, partido do semi-eixo OX . Notação $\arg(z)$
- módulo de $z = (a, b)$ é o comprimento do segmento de reta que subentende o vetor z . Notação

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

pelo teorema de Pitágoras;

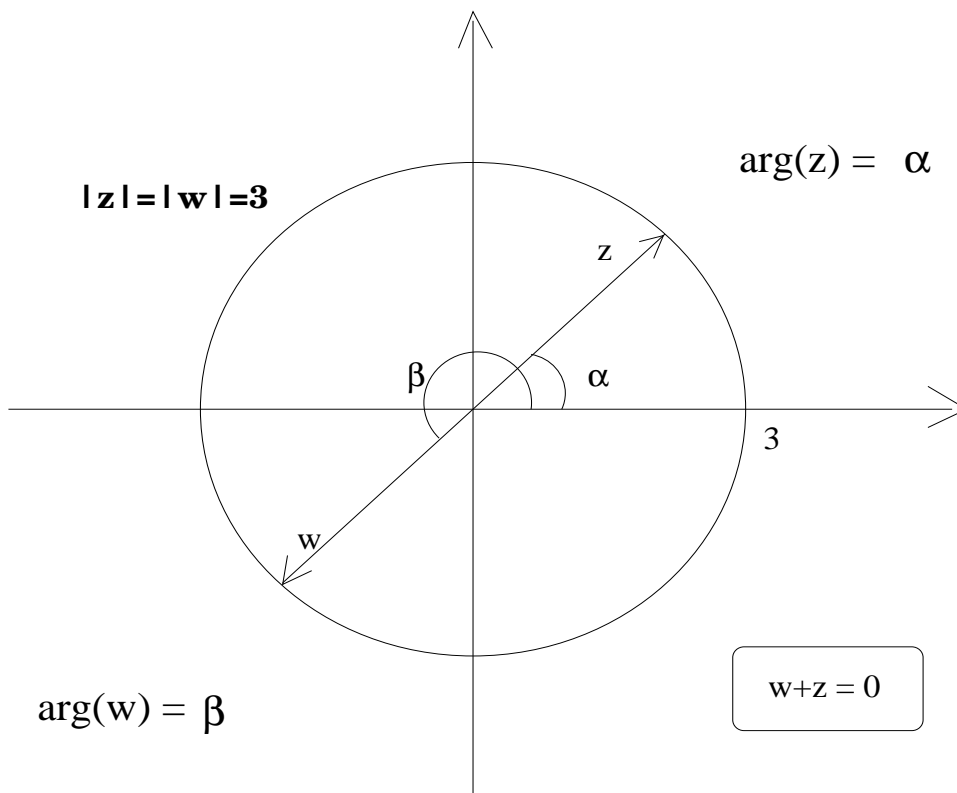


Figura 2.3:

A próxima lista é um *laboratório* que deve preparar a sua intuição para as construções que faremos depois.

Laboratório 1 (O plano complexo) *A interpretação geométrica*

1. Encontre as soluções da equação: $x^2 - 3x + 1 = 0$.
2. Encontre as soluções da equação: $x^2 + 1 = 0$.
3. Verifique, experimentando na equação, que os números $i, -i$ são soluções da equação $x^2 + 1 = 0$.
4. Some algebricamente e represente geometricamente: $u+v$;
 - a) $u = 3 + 2i; v = 2 + 3i$ b) $u = 3 - 2i; v = 3 + 2i$
 - c) $u = 3 + 2i; v = -3 - 2i$ d) $u = 3 - 2i; v = 2i - 3$
 - e) $u = 2i - 3; v = 3 - 2i$ f) $u = 2 - 3i; v = 3i - 2$
5. Efeitos da multiplicação

(a) Multiplique $3+2i$ pelos inteiros $2, 3, 5, 10$. Represente geometricamente os resultados.

(b) Multiplique $3 + 2i$ por $2i, 3i, 5i, 10i$. Represente geometricamente os resultados. Elabore uma teoria a partir da semelhança dos resultados obtidos.

6. Verifique que o número complexo $1 + 0i$ é o elemento neutro da multiplicação.
7. Calcule o inverso multiplicativo de $3 + 2i$ e represente ambos geometricamente.
8. Multiplique $z = 3 + 2i$ por si próprio, represente geometricamente e verifique o qual a relação entre $\arg(z), \arg(z^2)$.
9. Multiplique $3 + 2i$ por $3 - 2i$ e represente geometricamente estes vetores e o produto deles.
10. Módulo de um número complexo

Uma das razões que tornam os números complexos um tipo de número a parte, é o seu envolvimento com a geometria. Como um número real, os números complexos tem módulo, mas neste caso o método de cálculo se deduz direto do Teorema de Pitágoras.

Definição 4 *Módulo do número complexo $a + bi$.*

$$|(a + bi)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

11. Calcule o módulo de

$$u ; u \in \{3 + 2i, 2 + 3i, 3 - 2i, 2 - 3i\}$$

12. distância Observe que nos reais, $|a - b|$ é a distância, $d(a, b)$, entre os dois números a, b . Da mesma forma, entre dois números complexos u, v a distância entre eles vem do Teorema de Pitágoras e é o módulo da diferença $|u - v|$. Faça alguns exercícios para adquirir intuição: Encontre o lugar geométrico dos números complexos u tal que

$$\begin{array}{lll} a) |u| = 1 & b) |u| = 2 & c) |u - 3| = 1 \\ d) |u - 3| = 2 & e) |u - (2 + 3i)| = 1 & f) |u - (2 + 3i)| = 2 \\ g) |u| \leq 1 & h) |u| < 1 & i) |u| \leq 2 \\ j) |u - 3| < 1 & k) |u - (2 - 3i)| < 2 & l) |2u - (2 - 3i)| < 2 \end{array}$$

a solução do exercício anterior Pontos equidistantes de um ponto dado se encontram sobre uma circunferência. No caso das desigualdades vamos ter discos (com ou sem fronteira). Traduza as questões anteriores com a linguagem da equação de círculos, no plano \mathbf{R}^2 , **Notação:** $(\mathcal{C}(a, b), r)$ é o círculo de centro no ponto (a, b) e raio r .

13. Potências de i

- (a) Calcule as 10 primeiras potências de i e encontre uma lei formação que estas potências obedecem.
- (b) Escolha abaixo qual é o resultado impossível para a soma

$$i^n - i^m ; n, m \in \mathbf{N}$$

$$\square \pm(1 + i) \quad \square \pm(1 - i) \quad \square 0 \quad \square i \quad \square 2i \quad \square -2i$$

14. Relações de Girard, caso complexo Mostre que as relações de Girard, também são válidas para raízes complexas isto é, quando $\Delta < 0$.

Para a equação $x^2 + bx + c = 0, a = 1$, temos

$$(a) S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b$$

$$(b) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = c$$

Assim, a equação $x^2 + bx + c = 0$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

15. Encontre uma equação do segundo grau cujas raízes somem 6 e o produto seja 13.

2.2 Números complexos: extensão dos reais

Um número complexo é um par de números reais, portanto coincide, com o conjunto, com o \mathbf{R}^2 :

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2.$$

A diferença é que existe em \mathbf{C} uma multiplicação que estende a multiplicação dos números reais

Usaremos as duas notações para um número complexo

$$(a, b) \equiv a + bi$$

sem mais nos preocuparmos com observações a respeito.

Uma terminologia existe em torno dos números complexos que vamos relembrar. A figura (2.4) página 28, ilustra os fatos descritos na próxima definição.

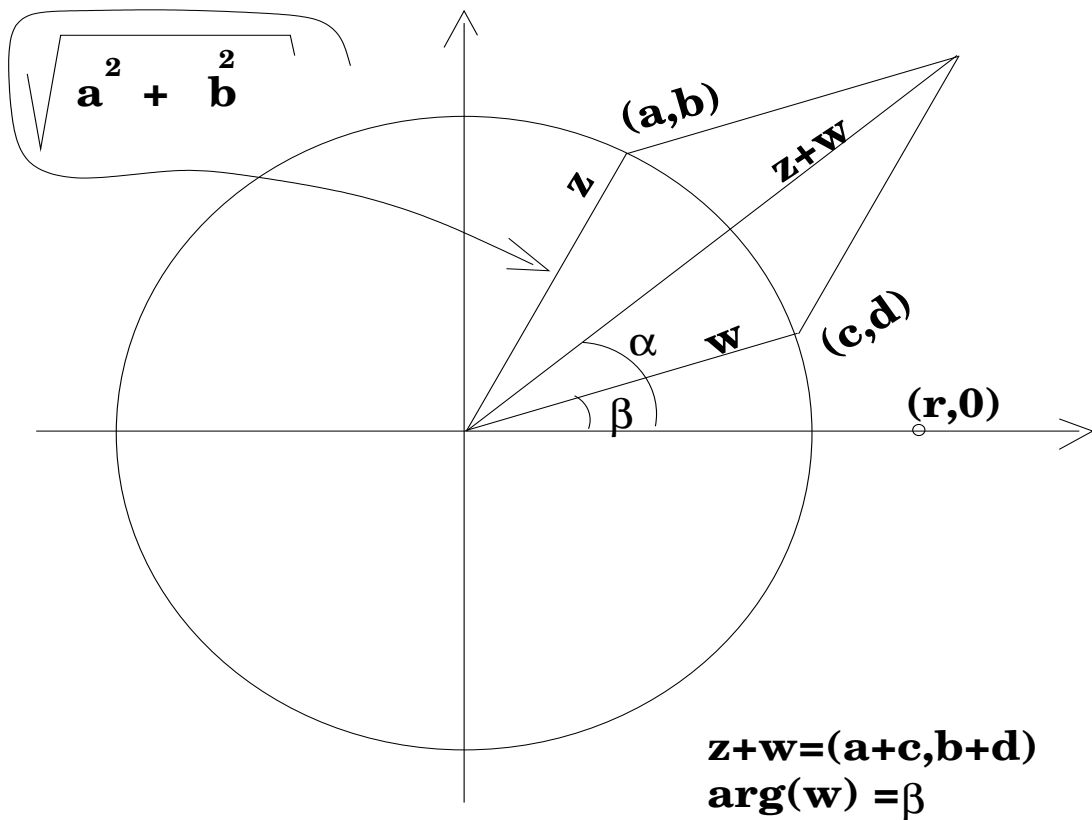


Figura 2.4: Propriedades dos números complexos

Definição 5 Parte real e imaginária

Dado um número complexo $z = (a, b)$ diremos

- parte real a é a parte real de z ; $a = \text{Re}(z)$
- parte imaginária b é a parte imaginária de z ; $b = \text{Im}(z)$

- módulo O número complexo $z = (a, b)$ determina com a origem $(0, 0)$ um segmento do plano que usamos para visualizar o número complexo z . O comprimento deste segmento é

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

o módulo de z .

- argumento de um número complexo é o ângulo que o segmento de reta que representa geometricamente o número complexo faz com o semi-eixo positivo dos números reais medido na direção anti-horária. Quer dizer que se um número complexo for real, o seu argumento pode ser zero quando for positivo, ou π quando for negativo.

Na figura (2.4) o argumento de w é β e o argumento de $z + w$ é α .

$$\arg(w) = \beta ; \arg(z + w) = \alpha$$

- Os números reais

1. O conjunto dos números reais positivos é o subconjunto de \mathbf{C} formado pelos números complexos cuja parte imaginária é zero, e argumento zero,

$$\mathbf{R}_+ = \{w = (x, 0) ; x \in \mathbf{R} ; \arg(w) = 0\}$$

é o semi-eixo positivo OX_+

2. O conjunto dos números reais negativos é o subconjunto de \mathbf{C} formado pelos números complexos cuja parte imaginária é zero e o argumento é π :

$$\mathbf{R}_- = \{w = (x, 0) ; x \in \mathbf{R} ; \arg(w) = \pi\}$$

é o semi-eixo positivo OX_-

Teorema 1 (Extensão da multiplicação dos reais)

A multiplicação de números complexos é uma extensão da multiplicação de números reais.

Dem:

Dados dois números complexos

$$z = (a_1, b_1) = a_1 + b_1i, \quad w = (a_2, b_2) = a_2 + b_2i$$

temos

$$zw = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = \tag{2.20}$$

$$(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) = \tag{2.21}$$

$$a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i \tag{2.22}$$

Considere agora dois número reais: r_1, r_2 . Eles determinam os dois números complexos

$$z = (r_1, 0), \quad w = (r_2, 0).$$

Se os multiplicarmos vamos ter

$$z, w \in \mathbf{R} \quad (2.23)$$

$$zw = (r_1, 0)(r_2, 0) = \quad (2.24)$$

$$(r_1 r_2 - 0, 0) = \quad (2.25)$$

$$r_1 r_2 + 0i = r_1 r_2 = zw \in \mathbf{R} \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

Como $\Im(r_1 r_2, 0) = 0$ podemos dizer, com certo abuso de linguagem, que $(r_1 r_2, 0) \in \mathbf{R}$

Consequentemente o produto de dois números complexos que sejam reais resulta no produto dos números reais que eles representam. Assim dizemos que a multiplicação de números complexos é uma extensão da multiplicação dos números reais.

q.e.d .

Como $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ então o conjunto dos números complexos é um grupo abeliano com a adição de pares ordenados que já conhecemos.

Vamos agora resolver o exercício (ex. , 7), página 26. Adotaremos uma expressão mais geral: calcular o inverso de (a, b) .

Por definição, o número complexo (x, y) será o inverso multiplicativo de (a, b) , se, e somente se, o produto dos dois for o elemento neutro da multiplicação $(1, 0) = 1 + 0i$. Vamos forçar esta igualdade para determinar (x, y) :

$$(x, y)(a, b) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \equiv \quad (2.28)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \quad (2.29)$$

$$\equiv \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} abx - b^2y = b \\ abx + a^2y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + aby = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)y = -b ; (a^2 + b^2)x = a \Rightarrow \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b}{a^2 + b^2} ; x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (2.33)$$

Se o número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ a solução encontrada é possível o que demonstra o teorema:

Teorema 2 *Inverso multiplicativo em \mathbf{C}*

Todo número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ tem um único inverso multiplicativo em \mathbf{C} que é da forma

$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \quad (2.34)$$

Podemos simplificar a expressão do inverso se adotarmos uma notação que depois será muito útil:

Definição 6 *Conjugado de um número complexo*

Chamamos de conjugado de $z = (a, b)$ ao número complexo $\bar{z} = (a, -b)$

Veja na figura (2.5) o número complexo z , o seu conjugado, o seu inverso aditivo e sua projeção em \mathbf{S}^1 .

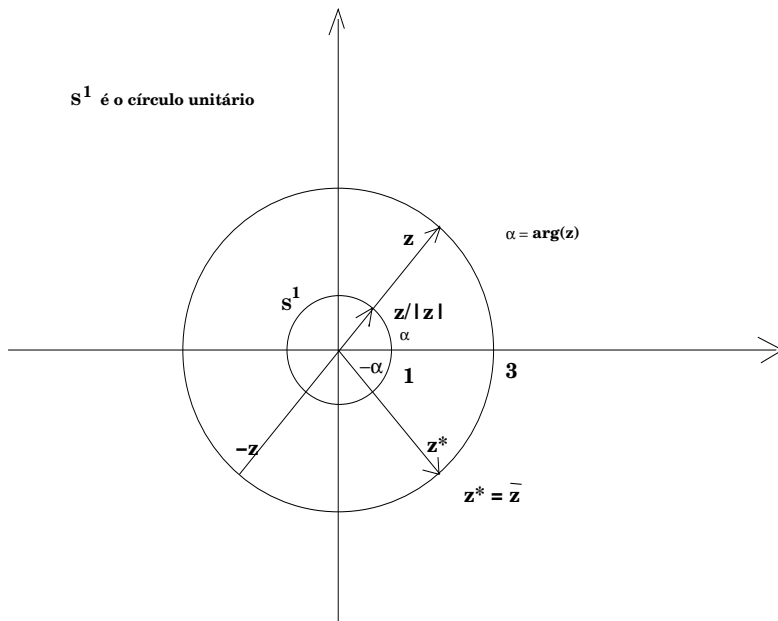


Figura 2.5: Conjugado de um número complexo

Em alguns textos o conjugado \bar{z} de z é designado por z^* . Vejamos agora que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(a,b)} = \frac{1}{a^2+b^2}(a, -b) = \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2+b^2}\bar{z} \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (2.38)$$

e agora, atendendo a promessa de resolver o (ex. , 7) temos o inverso multiplicativo de $3 + 2i = (3, 2)$ é

$$z = (3, 2) \mapsto \bar{z} = (3, -2) \quad (2.39)$$

$$z = (3, 2) \mapsto |z|^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \quad (2.40)$$

$$z = (3, 2) \mapsto \frac{1}{z} = \frac{1}{13}(3, -2) = \left(\frac{3}{13}, \frac{-2}{13}\right) \quad (2.41)$$

Podemos usar a última expressão da sequência de equações acima para mostrar um uso frequente do “conjugado”, veja a sequência

$$z = (a, b) ; \bar{z} = (a, -b) ; z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (2.44)$$

que mostra que podemos usar o conjugado para fazer surgir um número real no denominador, o que, muitas vezes, é útil.

O próximo teorema reúne as propriedades do conjugado:

Teorema 3 *Propriedades da conjugação*

Considere os números complexos u, v e o número real λ .

1. Linearidade

$$(a) \overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$$

$$(b) \overline{\lambda u} = \lambda \bar{u}$$

2. reflexividade $\bar{\bar{u}} = u$

3. produto $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}$

4. divisão $\overline{\frac{u}{v}} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$

5. reais Se $u = \bar{u}$ se e somente se $u \in \mathbf{R}$.

Laboratório 2 *Módulo, argumento, forma polar*

1. Resolva as equações

a) $4z = -5$	b) $(4 + 3i)z = -5$	c) $4z^2 + 2z = -1$	d) $z^2 = -1$
e) $(4 + 3i)z = -2i$	f) $\frac{z}{4+3i} = -50$	g) $z^2 = 1$	h) $z^2 + 2z = 1$
i) $\frac{z+5-3i}{3-2i} = 0$	j) $3z + i = 5z - 7$	k) $z^2 + 3z = -10$	l) $4z^2 = 1$

2. forma polar de um número complexo

(a) módulo

Calcule o módulo dos números complexos dados abaixo:

$$a) 2 + 3i \quad b) 2 - 3i \quad c) 0.4 + 0.2i \quad d) \frac{1+i}{2}$$

(b) argumento

Calcule a projeção dos números complexos abaixo, no círculo trigonométrico, \mathbf{S}^1 .

$$a) 2 + 3i \quad b) 2 - 3i \quad c) 0.4 + 0.2i \quad d) \frac{1+i}{2}$$

(c) módulo e argumento

Calcule a projeção de $a + bi$ sobre \mathbf{S}^1 determinando quando isto não for possível.

3. forma matricial I

Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ por $x+iy$, nesta ordem, equivale ao produto de matrizes

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

4. forma matricial II

Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ por $x+iy$, nesta ordem, equivale ao produto de matrizes

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

5. produto e rotação

(a) Considere dois pontos A, P sobre o círculo trigonométrico \mathbf{S}^1 ,

$$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni A = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \equiv (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbf{R}^2 \quad (2.47)$$

$$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni P = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha \equiv (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \in \mathbf{R}^2 \quad (2.48)$$

Identifique no produto AP a expressão do arco soma.

(b) Mostre que AP , nesta ordem, produz uma rotação de θ sobre o vetor \vec{P} no sentido horário (positivo).

(c) Como a multiplicação de números complexos é comutativa, procure a contradição, ou corrija o item anterior.

(d) Conclua do item anterior que

$$z, w \in \mathbf{S}^1 \Rightarrow zw \in S$$

ou seja, o círculo unitário é estável sob a multiplicação.

(e) O grupo dos complexos de módulo 1 Verifique que S , o conjunto dos números complexos de módulo 1, é um grupo comutativo com a multiplicação.

2.3 Módulo, argumento e conjugado

Vamos formalizar algumas experiências que foram feitas nas seções precedentes: parece que o produto de números complexos pode ser descrito de uma forma geométrica. Vamos ver que de fato é assim e deduzir as propriedades do produto, de forma bem simples, usando a representação geométrica.

2.4 Intepretação geométrica do produto

Há duas largas estradas correndo em paralelo: Os números complexos, um par de números reais da forma $a + bi$ e um *puro par de números reais* (a, b) .

São, em essência, duas coisas diferentes, com propriedades distintas mas também com muita coisa em comum. Por exemplo

- em \mathbf{C} tem um multiplicação
- em \mathbf{R}^2 não tem nenhuma multiplicação
- a adição em \mathbf{C} é exatamente a mesma adição de \mathbf{R}^2

A forma polar de um número complexo

Um dos exercícios de laboratório que lhe foram propostos pedia que você *projetasse* um número complexo $a + bi$ sobre o círculo unitário \mathbf{S}^1 .

Geometricamente, veja a figura (fig. 2.6), podemos obter esta projeção traçando a reta *determinada* pelo ponto $P = (a, b)$ e pelo centro de \mathbf{S}^1 , veja a figura (2.6).

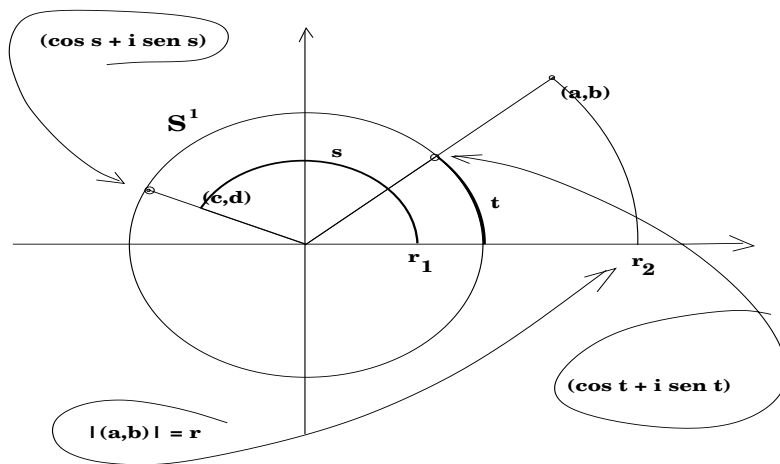


Figura 2.6: A projeção de $a + bi$ sobre \mathbf{S}^1 .

Algebricamente isto se faz dividindo (a, b) pelo seu módulo, resultando assim num vetor de módulo 1, portanto, sobre \mathbf{S}^1 . Usando a notação da (fig. 2.6),

temos

$$(cost, sent) = cost + isent = \frac{a + bi}{|(a + bi)|} = \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Estamos vendo assim a intimidade que existe entre os *números complexos* e a trigonometria. O importante neste momento é escrever o caminho de volta de $(cost, sent)$ para o número complexo (a, b) :

$$(a, b) = r(cost, sent) ; r = |(a, b)|. \quad (2.49)$$

com o que obtivemos a *forma polar* de (a, b) . Nela vemos representados os dois conceitos geométricos que formam um número complexo: *módulo* e *argumento*. Vamos re-escrever esta fórmula colocando em evidência estes dois conceitos:

$$z = (a, b) = |z|(cosarg(z), senarg(z)); \quad (2.50)$$

$$z = r(cost, sent); \quad (2.51)$$

$$|z| = r = |(a, b)| \quad (2.52)$$

Laboratório 3 Forma polar, trigonometria conjugação

1. Verifique as igualdades abaixo e faça uma representação geométrica das mesmas:

(a) Verifique que $2\mathcal{R}e(z) = z + \bar{z} \in \mathbf{R}$

(b) Verifique que $2i\mathcal{I}m(z) = z - \bar{z} \in i\mathbf{R}$

(c) Verifique que $z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbf{R}$

2. Calcule $(a + bi)^2$

3. Fórmula de Moivre

- (a) forma polar Quando escrevemos um número complexo usando a fórmula de Moivre, dizemos que usamos a forma polar do número. Escreva os números

$$z_1 = 4 + 3i ; z_2 = 3 - 4i ; z_3 = -3 - 4i ; z_4 = 3 + 4i$$

na fórmula polar.

- (b) potência Calcule z^2 com $z = r(cos\theta, sen\theta)$.

- (c) potência Suponha que a expressão encontrada para z^2 também valha para z^n . Escreva esta expressão. Deduza a expressão de z^{n+1} .

Resposta Este exercício mostra, por indução finita a fórmula de Moivre

$$z = r(cos\theta, sen\theta) \Rightarrow z^n = r^n(cos(n\theta), sen(n\theta))$$

- (d) Use a fórmula de Moivre para expressar $cos(3\theta)$ em função de $cos(\theta)$, $sen(\theta)$.

Solução 1

$$\cos(3\theta) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^3) \quad (2.53)$$

$$(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^3 = \quad (2.54)$$

$$= \cos(\theta)^3 + 3i\cos(\theta)^2\operatorname{sen}(\theta) - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)^2 - i\operatorname{sen}(\theta)^3 \quad (2.55)$$

$$= \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)^2 + (3\cos(\theta)^2\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)^3)i \quad (2.56)$$

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)^2 \quad (2.57)$$

4. As raízes de um número complexo

(a) forma polar Use a fórmula de Moivre calcular $\sqrt[3]{z_i}$ com

$$z_1 = 4 + 3i ; z_2 = 3 - 4i ; z_3 = -3 - 4i ; z_4 = 3 + 4i$$

5. Ache todos os valores de $z \in \mathbf{C}$ tal que $z^2 + |z| = 0$.

6. Encontre todos os complexos z que satisfaçam à condição

$$|z - 25i| < 15$$

7. Qual o valor máximo do módulo do número complexo z se

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$$

8. Resolva a equação $(1 - i)^x = 2^x$. **Solução:**

$$(1 - i)^x = 2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1 - i|^x = 2^x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x$$

Mas a última igualdade somente é possível para $x = 0$.

9. Mostre que vale a fórmula do binômio de Newton

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{(n-k)} ; z, w \in \mathbf{C}$$

10. Inteiros de Gauss**Definição 7** *Inteiros de Gauss*

Chamamos de Inteiros de Gauss ao conjunto $Z + iZ$ de todos os números complexos com parte real e parte imaginária inteiras.

(a) Anel dos inteiros de Gauss Verifique que o conjunto dos inteiros de Gauss com a adição e multiplicação dos complexos é um anel.

Solução

$(\mathbf{C}, +, \cdot)$ é um corpo, como $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ mas se fizermos a restrição de coordenadas inteiras para os números complexos deixa de existir o inverso multiplicativo, portanto em $Z + iZ$ não vale a propriedade da existência do inverso multiplicativo e assim $(Z + iZ, +, \cdot)$ é um anel, comutativo com unidade.

- (b) Prove que se z for um inteiro de Gauss então qualquer potência inteira de z também será um inteiro de Gauss.

Solução

Isto é consequência direta do Teorema do Binômio de Newton. Logo z^n é um inteiro de Gauss.

- (c) Prove que para todo número complexo e todo inteiro n vale

$$(|z|^n) = |z^n|$$

Solução:

Usando a fórmula de Abel-Euler temos

$$z = r(\cos(\theta) + isen(\theta)) ; z^n = r^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

$$|z| = r ; |z^n| = r^n = |z|^n$$

Observe que n não precisa ser inteiro.

- (d) Verifique, em particular, que se z for um inteiro de Gauss, então $|z^2|^n \in \mathbf{Z}$.
- (e) Se $a, b, n \in \mathbf{Z}_+$, prove que existem inteiros x, y tais que

$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Solução:

O módulo de um inteiro de Gauss não será, em geral, um inteiro, mas o o quadrado do seu módulo será um número inteiro.

Considere $z = a + bi$ um inteiro de Gauss, construído com os inteiros a, b dados, e um número inteiro n também dado.

$$z = a + bi \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$

$$z, z^n, (z^n)^2 \text{ são inteiros de Gauss}$$

$$\exists x, y \in \mathbf{Z}; z^n = x + iy \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$

$$(|z|^n)^2 = (|z|^2)^n = (a^2 + b^2)^n$$

$$(|z|^n)^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$$

$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Os inteiros x, y são as partes reais e imaginárias de z^n quando $z = a + bi \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$. Por exemplo, considere $a, b, n = 2, 3, 4$ nesta ordem.

$$z = a + bi = 2 + 3i \implies z^4 = (2 + 3i)^4 = -(119 + 120i)$$

$$(a^2 + b^2)^n = 28561 = 119^2 + 120^2$$

os inteiros procurados x, y são 119, 120

11. Prove que se $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$ então

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha)$$

Solução:

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} &= 2\cos(\alpha) \in \mathbf{R} \implies \\
z \in \mathbf{S}^1 &\equiv z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \\
z^n &= \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \\
\frac{1}{z^n} &= \cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha) \\
z^n + \frac{1}{z^n} &= 2\cos(n\alpha)
\end{aligned}$$

2.4.1 Para melhorar a arte de fazer contas

Nenhum dos exercícios abaixo será utilizado em qualquer ponto deste livro, no futuro, você pode, tranquilamente, ignorá-los.

Exercícios 1 Desafios...

1. Escreva na forma polar $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ e $w = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.
2. Sendo $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^4-1}$ calcular $f(2+3i)$.
3. Mostre que se

$$(z-p)(\bar{z}-\bar{p}) = p\bar{p}$$

então o ponto z descreve um círculo de centro no ponto p passando pela origem dos eixos.

4. Considere $w = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$. Mostre que se z_1, z_2, z_3 satisfizerem a relação

$$z_1 + wz_2\bar{w}z_3 = 0$$

então eles são, respectivamente, paralelos aos lados de um triângulo equilátero.

5. Um número complexo varia mas seu módulo fica compreendido entre 1 e 6. Calcule o módulo máximo¹ e o módulo mínimo da função

$$f(z) = z^2 + 3z.$$

6. Se $z = 2 + i(w - \frac{1}{w})$ calcule as partes reais e imaginárias de z em função das partes reais e imaginárias de w . Descreva o lugar geométrico do ponto w quando $z \in \mathbf{R}$.
7. Prove que se $|z| = 1$ então $\operatorname{Re}(\frac{1-z}{1+z}) = 0$

¹o maior e o menor valor do módulo de $f(z)$

Índice Remissivo

- S^1 , 32
- adição, complexos, 23
- algébrica
 - geometria, 14
- analítica
 - geometria, 7, 11
- argumento, 25
 - número complexo, 29
- $\arg(z)$
 - argumento, 29
- cartesianas
 - coordenadas, 7
- Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz
 - desigualdade, 13
- cônicas, 7, 15
- coeficiente
 - angular, 11
 - linear, 11
- complexo
 - argumento, 29
 - módulo, 29
- complexos, adição, 23
- complexos, inverso multiplicativo, 26
- complexos, módulo, 26
- complexos, multiplicação, 26
- complexos, produto, 24
- conjugado, 30, 35
- Descartes, 7
- distância
 - entre dois pontos, 11
- equação
 - círculo
 - trigonométrico, 14
- espaço
 - com produto interno, 13
- espaço métrico, 12
- euclidiana
 - geometria, 11
- fórmula de Moivre, 35
- figura
 - cônicas, 19, 20
 - cone
 - a elipse, 18
 - a hipérbole, 17
 - a parábola, 18
 - conjugado, 31
 - coordenadas, 10
 - curva plana, 15
 - distância
 - entre dois pontos, 12
 - forma polar, 34
 - frações, 8
 - números complexos, 28
 - geometria, 25
 - Produto
 - números complexos, 24
 - programa, 16
 - reta
 - numérica, 7
 - reta orientada, 8
 - Rosetta, 2
 - forma polar, 32, 34
- Gauss
 - Inteiros de, 36
 - geometria
 - analítica, 7
 - números complexos, 25
 - geratriz

- do cone, 17
- Girard
 - relações, 27
- gráfico
 - números complexos, 24
- imaginárias, raízes, 22
- Inteiros de Gauss, 36
- matricial
 - produto, 33
- métrico
 - espaço, 12
- módulo
 - número complexo, 29
- Moivre
 - fórmula, 35
- número complexo, 22
- números complexos, 21
- O plano complexo, 26
- ordem
 - relação de, 9
- origem
 - dos eixos, 14
- parte
 - imaginária, 23, 35
 - real, 23, 35
- parte imaginária, 35
- parte real, 35
- plano
 - digitalizar, 9
 - numerizar, 9
- plano coordenado, 9
- polar, forma, 32
- Potências de i , 27
- produto
 - escalar, 13
 - interno, 13
- produto, complexos, 24
- produto e matriz, 33
- produto interno
 - espaço com, 13
- produto, raiz, 21
- raiz do produto, 21
- raízes
 - da unidade, 36
 - de um número complexo, 36
- raízes imaginárias, 22
- real
 - número, 9
- representação
 - geométrica, 23, 24
- reta
 - digitalizar, 7
 - geométrica, 9
 - numerizar, 7
 - numérica, 9
- reta numérica, 9
- trigonométrico
 - círculo, 14, 32
- vetor, 25

Referências Bibliográficas

- [1] Frank Ayres Jr. *Cálculo - Col. Schaum*. Bookman, 2007.
- [2] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 1*. LTC, 2011.
- [3] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 2*. LTC, 2011.
- [4] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 3*. LTC, 2011.
- [5] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol. 4*. LTC, 2011.
- [6] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.
- [7] James Stewart. *Cálculo Vol I*. Cengage Learning, 2013.
- [8] James Stewart. *Cálculo Vol II*. Cengage Learning, 2013.