Matemática Aplicada	**Lista 2**
Probabilidade	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**

alun@:

15 de agosto de 2015	**Instituto Alencarina**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	www.fundamentos.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Resumo teórico Este "*resumo teórico*" é um auxílio rápido. Você encontra todo o conteúdo desta disciplina nos textos da página.

1. **tabela verdade** Uma *tabela de verdade* é um algoritmo que permite comparar, e eventualmente demonstrar, a igualdade entre duas sentenças.

   Dadas duas sentenças $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ existe, para cada uma delas, dois "*estados possíveis: verdade, falso* o que produz um arranjo com repetição destes dois valores apresentados na tabela:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$	$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

   que foi expandida para representar as possibilidades de verdade das sentenças $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ e $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, ou como na lógica se escreve,

   $$(\mathcal{A} \text{ e } \mathcal{B}) \text{ e } (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B})$$

   respectivamente.

   As duas primeiras colunas contém os arranjos com repetição *2-a-2*, dos dois valores possíveis `V,F`, ou dois estados possíveis se estas sentenças puderem ser testadas contra estes dois valores e obviamente que existem sentenças que não respondem a nenhum destes valores porque não podem ser testadas, mas vou deixar de lado este caso. Considerar esta possibilidade consiste em adotar a chamada *lógica fuzzy*.

   Existem sentenças chamadas abertas, como $x \in A$, ou $3x+4=9$ que não podem ser ditas *verdadeiras* ou *falsas*, pois dependem do valor que a variável x tiver.

2. **Operações com conjuntos - a diferença**

A operação diferença de conjuntos é designada por $A - P$, mas esta operação somente tem sentido quando houver um *conjunto universo*. Nesta lista suponha que todos os conjuntos são subconjuntos de $\mathbf{N}$ o conjunto dos números naturais.

Na figura (fig 1), página 2, você vê um tipo de *diagrama*, o de Venn, que serve

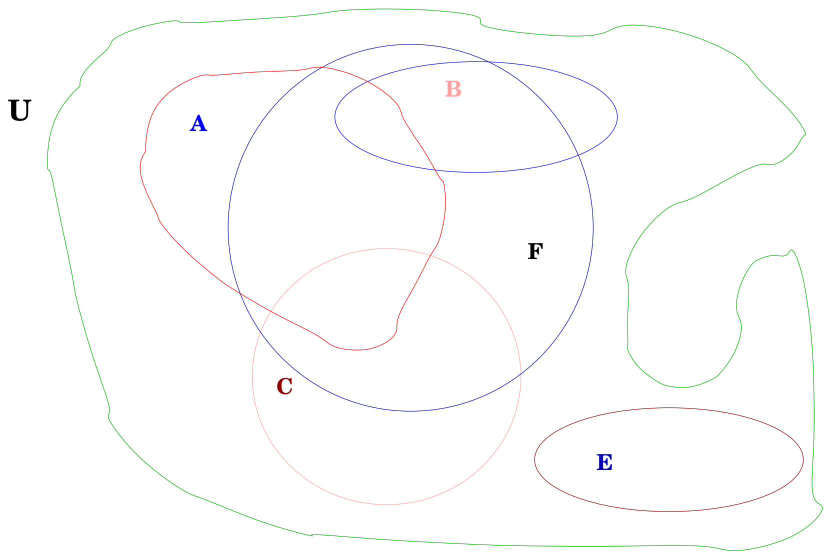

Figura 1: diagrama de Venn

para ilustrar as relações de $\subset, A - B, A_U^c$.

3. **<u>indução finita</u>** é um método para conduzir demonstrações baseado no conjunto dos números naturais. Para isto precisamos de uma afirmação $P(k)$ que represente o teorema sob forma de uma expressão que dependa de um número natural k, por exemplo,

$$P(k) := \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j \tag{1}$$

ou ainda que "a media geométrica é menor do que a média aritmética de k números positivos dados. Podemos facilmente provar que $P(2)$ é verdadeira (como também $P(1)$) e assim estabelecer a *hipótese de indução*: "a relação expressa na equação (1) é verdadeira".

Se conseguirmos provar que $P(k) \quad \Rightarrow \quad P(k+1)$, então, pelo *teorema da indução finita*, $P(n)$ é verdadeira para qualquer número natural n. A implicação, no exemplo acima, se obtém facilmente usando as propriedades do logaritmo, uma função convexa crescente.

Assim o método da *indução finita* tem duas etapas:

(a) A demonstração da expressão para um valor especial, aqui no exemplo, mencionamos $k = 2$;

(b) A demonstração do encadeamento indutivo, a implicação

$$P(k) \quad \Rightarrow \quad P(k+1)$$

;

Em geral esta é a grande demonstração, o encadeamento indutivo. No exemplo, usamos um teorema difícil, que o logaritmo é crescente e convexo, para "terminar" a demonstração da desigualdade artimético-geométrica.

Algumas fórmulas que podem ser provadas com indução finita.

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n+1}{2}n \tag{2}$$

$$1 + 4 + \cdots n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\tfrac{n+1}{2}n)^2 = \tfrac{(n+1)^2 n^2}{4} \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \tfrac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \tfrac{2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} \tag{7}$$

$$\text{Soma dos ângulos num polígono com } nlados :(n-2)\pi; \tag{8}$$

Se chamarmos de *progressão de grau* m a uma expressão $P(k)$ que se pode expressar como um polinômio do grau do grau $\underline{m}$, então "*a soma dos termos de uma* progressão de grau m *é uma* progressão de grau $m + 1$ " é um exemplo de teorema que pode ser demonstrado por *indução finita*. É exatamente este fato que justifica a fórmula de integração de funções polinomiais que você pode encontrar em qualquer livro de Cálculo.

Exercícios 1 *Probabilidade*
Objetivo: *Análise combinatória simples*
palavras chave: Análise Combinatória Simples , Número de elementos dum conjunto , Operações com conjuntos .

1. **Números combinatórios**

   (a) **(V)[ ](F)[ ] Num pombal existem n casinhas mas $n+1$ pombos se agasalharam devido as fortes chuvas. Então, em pelo menos uma das casinhas há dois pombos agasalhados.**

   (b) **(V)[ ](F)[ ]** C_n^p **é o número de subconjuntos que podemos extrair de** $\{1, 2, \ldots, n\}$ **então**

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \tag{9}$$

Solução 1 ***Por*** **indução finita.**

A verificação inicial será feita sobre os elementos da linha de ordem 2, vou ignorar as linhas de ordem zero e um.

Nesta linha de ordem 2 há três elementos: 1,2,1 que correspondem C_2^0, C_2^1, C_2^2 ***e ela foi obtida aplicando a*** **Lei de Stifel** ***à linha anterior se tem:***

$$C_2^0 = 1 = \frac{2!}{(2-0)!0!}; C_2^1 = 2 = \frac{2!}{(2-1)!1!}; C_2^2 = 1 = \frac{2!}{(2-2)!2!} \tag{10}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \tag{11}$$

$$C_{n+1}^0 = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = 1 = C_{n+1}^{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(n+1))!(n+1)!}; \tag{12}$$

$$0 < p < n+1 \Rightarrow C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}; \tag{13}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}; \tag{14}$$

$$C_n^{p-1} = \frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!}; \tag{15}$$

$$\frac{n!}{(n-p)!p!} + \frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!} = \frac{(n-p+1)n! + pn!}{(n-p+1)!p!} = \tag{16}$$

$$= \frac{(n-p+1)+p)n!}{(n-p+1)!p!} = \frac{(n+1))n!}{(n-p+1)!p!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!p!} = \tag{17}$$

$$= C_m^p; m = n+1 \tag{18}$$

- **Na equação (10) apenas constatei que a fórmula vale, como estabelece o *princípio da indução finita.***
- **Na equação (11), está enunciada a *hipótese de indução* numa forma em que ela significa que a expressão vale para todos os valores de $p \leq n$ para um valor genérico n;**
- **Na equação (12) e seguintes, estou usando a *hipótese de indução* para calcular um número combinatório C_{n+1}^p qualquer, da linha de ordem $n+1$.**

(c) **(V)[ ](F)[ ] A quantidade de subconjuntos que podemos extrair do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é a soma da linha de ordem n do triângulo de Pascal**

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n \tag{19}$$

(d) **(V)[ ](F)[ ]**

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n \tag{20}$$

(e) **(V)[ ](F)[ ]**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} \tag{21}$$

a igualdade entre as duas últimas expressões é consequência da simetria das linhas do triângulo de Pascal.

2. algoritmo da divisão euclidiana

Quando dividimos dois números naturais Dividendo e divisor, encontramos dois outros números naturais quociente e resto tais que

$$D = dq + r; \tag{22}$$

A fórmula na equação (eq. 22) se chama de *algoritmo da divisão euclidiana.*

(a) **(V)[ ](F)[ ] O quociente, q é sempre menor do que o divisor d.**

(b) **(V)[ ](F)[ ] O resto,r, é sempre menor do que o dividendo D.**

(c) **(V)[ ](F)[ ] O resto, r, é sempre menor do que o divisor d.**

(d) **(V)[ ](F)[ ] Quando a divisão for exata, o resto, r será igual ao divisor d.**

(e) **(V)[ ](F)[ ] Quando a divisão for exata, o resto, r será 0.**

3. Tabela de verdade - assunto da lógica

Nesta questão vou usar as operações com conjuntos criando sentenças para nelas aplicar o instrumento *tabela de verdade.* Exemplos de sentenças: $x \in A, x \in P$ em que A, P são dois subconjuntos dos números naturais definidos a seguir.

Considere os conjuntos

$$A = \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ **conjunto dos algarismo decimais** ;} \quad (23)$$

$$2\mathbf{N} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} \text{ **conjunto dos números pares positivos**;} \quad (24)$$

$$2\mathbf{N} + 1 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \text{ **conjunto dos números ímpares positivos**;} \quad (25)$$

$$\mathrm{IP} \text{ **conjunto dos números primos**;} \quad (26)$$

$$\mathbf{N} \text{ **conjunto dos números naturais**} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}; \quad (27)$$

N é o *conjunto universo* nesta questão.

Selecione como verdadeira quando a tabela de verdade for consistente (não tiver contradições).

(a) **(V)**[ ]**(F)**[ ]

$x \in A$	**não**$(x \in A)$
V	**V**
F	**F**

(b) **(V)**[ ]**(F)**[ ]

$x \in A$	**não**$(x \in A)$
V	**F**
F	**V**

(c) **(V)**[ ]**(F)**[ ]

A	2**N**	**não**(2**N**)	$A -$ 2**N**
V	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**

(d) **(V)**[ ]**(F)**[ ]

A	2**N**	$(A \cap$ 2**N**$)$
V	**F**	**F**
F	**F**	**F**
V	**V**	**V**
F	**V**	**F**

(e) **(V)**[ ]**(F)**[ ]

A	P	$(A \cap P)$	**não**(P)	$A - P$	$A - (A \cap P)$
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**

4. Tabela de verdade - assunto da lógica $S =$ "Os negócios vão mal e os preços dos produtos estão altos"

   é uma sentença composta de duas outras mais simples: A, B

   - $A =$ "os negócios vão mal"
   - $B =$ "os preços dos produtos estão altos"

   cujas tabelas de verdade são

A	B	$A \cap B$
V	**F**	**F**
F	**F**	**F**
V	**V**	**V**
F	**V**	**F**

   e podemos dizer que $S = A \cap B$.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se A for verdadeira então S é falsa.
   (b) (V)[ ](F)[ ] Se A for falsa então S é falsa.
   (c) (V)[ ](F)[ ] Se A for falsa então S é verdadeira.
   (d) (V)[ ](F)[ ] Se A for verdadeira então S é falsa.
   (e) (V)[ ](F)[ ] Se A e B forem verdadeiras então S é verdadeira.

5. Números primos e lógica

   Considere os conjuntos

$$A = \{0, 1, \dots, 9\} \text{ conjunto dos algarismo decimais ;} \tag{28}$$
$$2\mathbf{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} \text{ conjunto dos números pares positivos;} \tag{29}$$
$$2\mathbf{N} + 1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \text{ conjunto dos números ímpares positivos;} \tag{30}$$
$$|\mathrm{P} \text{ conjunto dos números primos;} \tag{31}$$
$$\mathbf{N} \text{ conjunto dos números naturais} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}; \tag{32}$$
$$P_2 = \{x \in \mathbf{N}; x > 2\} \tag{33}$$

   N é o *conjunto universo* nesta questão.

   Selecione as tabelas de verdade que forem consistentes (sem contradições).

   (a) (V)[ ](F)[ ]

$2\mathbf{N}+1$	$2\mathbf{N}$	P_2	$P_2 \cap \vert\mathrm{P})$
V	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
V	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**

(b) (V)[ ](F)[ ] $\mathcal{S} = (x \in |\mathrm{P})$ é verdadeira então se $\mathcal{T} = (x \in 2\mathbf{N})$ e $x > 10$ então $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ é verdadeira.

(c) (V)[ ](F)[ ] Então se $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$, o conjunto dos algarismo decimais, e $2\mathbf{N}$ o conjunto dos números pares, então

$$A - 2\mathbf{N} = \{1, 3, 5, 7, 9\}; 2\mathbf{N} - A = \{10, 11, 12, 13, \ldots\} \tag{34}$$

e estes dois conjuntos são finitos.

(d) (V)[ ](F)[ ] O *conjunto universo* é $\mathbf{N}$, o conjunto dos números naturais.

Então se $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$, o conjunto dos algarismo decimais, e $2\mathbf{N}$ o conjunto dos números pares, então

$$A - 2\mathbf{N} = \{1, 3, 5, 7, 9\}; 2\mathbf{N} - A = \{10, 11, 12, 13, \ldots\} \tag{35}$$

O conjunto $A - 2\mathbf{N}$ é finito e o conjunto $2\mathbf{N} - A$ é infinito.

(e) (V)[ ](F)[ ] Se $\mathbf{N}$ for o *conjunto universo* então podemos definir $A^c_{\mathbf{N}} = \mathbf{N} - A$. Se $\mathbf{IP}$ designar o conjunto dos números primos, então $\mathbf{IP}^c_{\mathbf{N}}$ é o conjunto dos números pares.

6. Conjuntos

A definição de $A \Rightarrow B$ é "B ou não A" e então a tabela de verdade destas sentenças é

A	B	nãoA	B ou não A	$A \Rightarrow B$
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**

na última coluna você tem a tabela de verdade de $A \Rightarrow B$ relativamente às tabelas de verdade de A, B. Observe que a última coluna é cópia da penúltima - uma definição, portanto uma outra forma de fazer definições é a cópia das tabelas de verdade entre duas sentenças.

Nas sentenças seguintes, "João" e "Antônio" são dois nomes fictícios, e qualquer semelhança com a realidade é pura coincidência.

- A = "João produz mais do que Antônio";
- B = "João ganha mais do que Antônio";

(a) (V)[ ](F)[ ] A sendo verdadeira então $A \Rightarrow B$ é verdadeira.

(b) (V)[ ](F)[ ] A sendo verdadeira então $B \Rightarrow A$ é verdadeira.

(c) (V)[ ](F)[ ] A sendo verdadeira então $A \Rightarrow B$ é falsa.

(d) (V)[ ](F)[ ] A sendo verdadeira então $B \Rightarrow A$ é falsa.

(e) (V)[ ](F)[ ] Se B for verdadeira então $A \Rightarrow B$ é verdadeira.

7. Conjuntos

Se

- $A =$ "os preços estão altos".
- $B =$ "os preços estão subindo".

então é verdade que

(a) (V)[ ](F)[ ] $A \cap B$ equivale a "os preços estão altos ou continuam subindo."

(b) (V)[ ](F)[ ] $A \cap B$ equivale a "os preços estão altos e continuam subindo."

(c) (V)[ ](F)[ ] $A \cup B$ equivale a "os preços estão altos ou continuam subindo."

(d) (V)[ ](F)[ ] $A \cup B$ equivale a "os preços estão altos e continuam subindo."

(e) (V)[ ](F)[ ] $A^c \cap B$ equivale a "os preços não estão altos e continuam subindo."

8. Conjuntos "Within 30 minutes the solar power production would decrease from 17.5 gigawatts to 6.2GW and then increase again up to 24.6GW. This means that within 30 minutes the system will have to adapt to a load change of -10GW to +15GW, said Patrick Graichen, executive director of Agora Energiewende" "Dentro de 30 minutos a produção de energia solar diminuiria de 17,5 gigawatts para 6.2GW e depois irá aumentar, novamente, até 24.6GW. Isso significa que no prazo de 30 minutos, o sistema terá de se adaptar a uma mudança de carga de -10GW para + 15GW, disse Patrick Graichen, diretor executivo da Ágora Energiewende"

(a) (V)[ ](F)[ ]Em percentual, a queda de energia induzida pelo eclipse, na Inglaterra, foi de $64.5714285\% = 100\% - 35.4285714285\%$

(b) (V)[ ](F)[ ] Em percentual, o pique da alteração de energia induzida pelo eclipse, na Inglaterra, foi de $74.796748\% = (100 - 25.203252)\%$

(c) (V)[ ](F)[ ] Em percentual, o pique da alteração de energia induzida pelo eclipse, na Inglaterra, foi de 25.2032520%

(d) (V)[ ](F)[ ] Em percentual, o pique da alteração de energia induzida pelo eclipse, na Inglaterra, foi de 25.2032520%

(e) **(V)[ ](F)[ ] Em percentual, a queda de energia induzida pelo eclipse, na Inglaterra, foi de** 45.4285714%

9. **Indução finita e lógica matemática**

   (a) **(V)[ ](F)[ ] A soma dos termos da p.a.** $1, 2, 3, \ldots, n$ **é**

   $$\frac{n+1}{2};$$

   (b) **(V)[ ](F)[ ] A soma dos termos da p.a.** $1, 2, 3, \ldots, n$ **é**

   $$\frac{(n+1)n}{2};$$

   (c) **(V)[ ](F)[ ] A soma dos termos da p.a.** $a, 2a, 3a, \ldots, na$ **é**

   $$a\frac{(n+1)n}{2};$$

   (d) **(V)[ ](F)[ ] A soma dos termos da p.g.** $a, a^2, a^3, \ldots, a^n$ **é**

   $$a\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

   (e) **(V)[ ](F)[ ] A soma dos termos da p.g.** $1, a^2, a^3, \ldots, a^n$ **é**

   $$\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

10. **Indução finita Quero provar que a fórmula que me dá o valor da soma dos quadrados**

    $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = P(n+1) - P(0); \tag{36}$$

    em que P **é o polinômio do terceiro grau,**

    $$P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{37}$$

    à semelhança com a soma dos termos duma p.a. Método: indução finita.

    (a) **(V)[ ](F)[ ] A fórmula vale para a soma dos dois primeiros quadrados.**

    (b) **(V)[ ](F)[ ] A hipótese de indução, siginfica que**

    $$1 + 4 + \cdots + N^2 = \sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - P(1) \tag{38}$$

    e não precisa ser demonstrada, apenas descrita!

(c) **$\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ Usar a hipótese de indução significa verificar se**

$$P(N) - P(1) = 1 + 4 + \cdots + N^2 \quad \Rightarrow \tag{39}$$
$$\Rightarrow \quad P(N+1) - P(1) = 1 + 4 + \cdots + N^2 + (N+1)^2 \tag{40}$$

(d) **$\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ O princípio do encadeamento vale porque**

$$1 + 4 + \cdots + N^2 = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - P(1) \tag{41}$$

Na equação (eq. 41) usei a hipótese de indução, de que a expressão à esquerda dá o valor da soma dos N primeiros quadrados, e, aplicando o próximo passo, que é somar $(N+1)^2$ para verificar se a fórmula ainda vale, tenho

$$1 + 4 + \cdots + N^2 + (N+1)^2 = \tag{42}$$
$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - P(1) + (N+1)^2; \tag{43}$$
$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{6(N+1)^2}{6} - P(1) = \tag{44}$$
$$= \frac{N(N+1)(2N+1)+6(N+1)^2}{6} - P(1) = \tag{45}$$
$$= \frac{(N+1)(N(2N+1)+6(N+1))}{6} - P(1) = \tag{46}$$
$$= \frac{(N+1)\left(2N^2+7N+6\right)}{6} - P(1) \stackrel{?}{=} \tag{47}$$
$$= \frac{(N+1)(N+2)(2(N+1)+1)}{6} - P(1) = \tag{48}$$
$$= \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6} - P(1) = \tag{49}$$
$$= \frac{(N+1)(2N^2+3N+4N+6)}{6} - P(1) \stackrel{!}{=} \tag{50}$$
$$= \frac{(N+1)(2N^2+7N+6)}{6} - P(1) \tag{51}$$

(e) **$\underline{\text{(V)[ ](F)[ ]}}$ A expressão proposta não é verdadeira como fórmula para soma dos quadrados.**